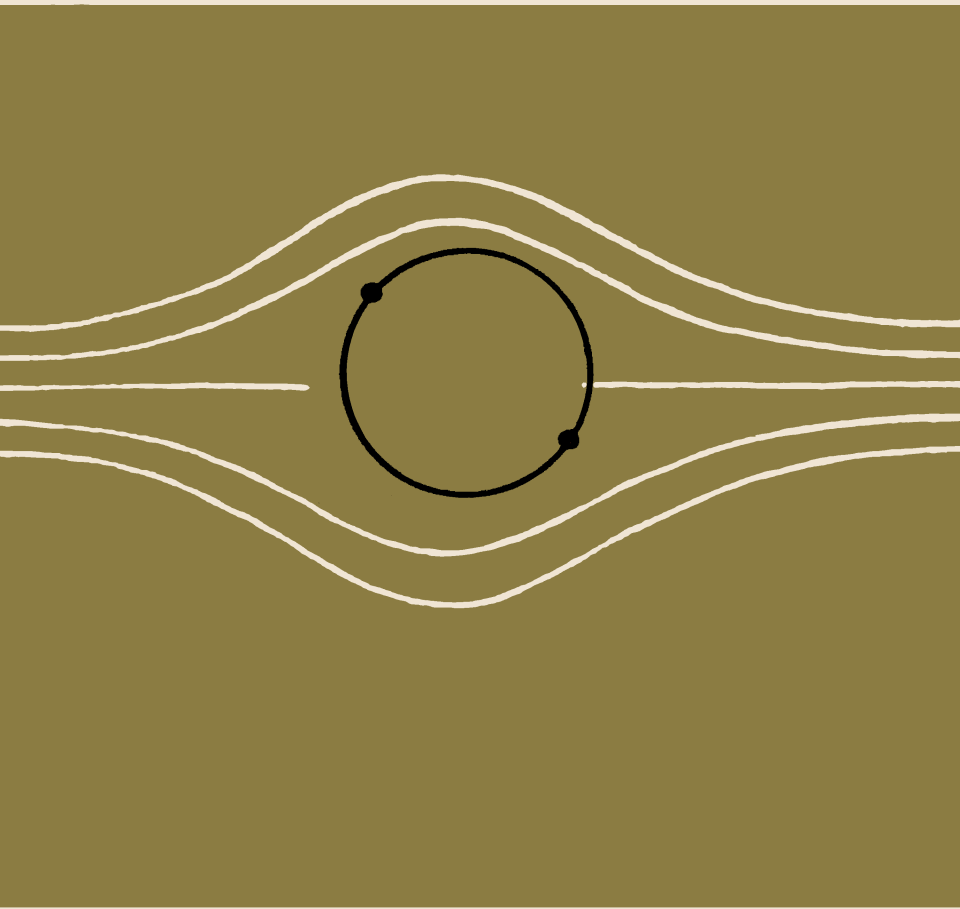


Ф и з и к а

Библиотечка
физико-математической школы

Б.Ю.КОГАН

СТО ЗАДАЧ ПО МЕХАНИКЕ



Б. Ю. КОГАН

СТО ЗАДАЧ ПО МЕХАНИКЕ



Издательство «Наука»

Главная редакция
физико-математической литературы

Москва 1973

531
К 57
УДК 531/534

Физика

*Библиотечка
физико-математической школы*

Редактор серии
Я. А. Смородинский

© Издательство «Наука», 1973

К $\frac{0231-1823}{042 (02)-73}$ 104-73

КИНЕМАТИКА

1. Трехлопастный вентилятор вращается со скоростью 2000 оборотов в минуту. Если комната, в которой он установлен, будет освещаться люминесцентной лампой дневного света, то скорость вращения этого вентилятора будет казаться иной. Какой?

2. Точка движется по прямой. При этом за *любой* интервал времени длительностью в 1 с она проходит путь длиной 1 м. Равномерно ли такое движение?

3. Прямолинейно движущаяся точка проходит путь 1 м, имея начальную скорость 1 мм/с и конечную скорость 2 мм/с. Может ли среднее ускорение этой точки иметь величину 100 км/с²?

4. Поезд начинает движение из состояния покоя и равномерно увеличивает свою скорость. На первом километре она возросла на 10 м/с. На сколько возрастет она на втором километре?

5. Автомобиль начинает движение из состояния покоя и, двигаясь по прямой, проходит первый километр с ускорением a_1 , а второй — с ускорением a_2 . При этом на первом километре его скорость увеличивается на 10 м/с, а на втором километре — на 5 м/с. Какое ускорение больше: a_1 или a_2 ?

6. Камень брошен вертикально вверх и первую половину пути движется замедленно, а вторую — ускоренно. Означает ли это, что на первой половине пути его ускорение отрицательно, а на второй — положительно?

7. Рассмотрим задачу. Камень брошен вертикально вверх. Какой должна быть его начальная скорость, чтобы подъем на высоту 29,4 м занял 6 с? Как изменится это число, если сократить время подъема до 3 с? (Сопротивление воздуха не учитывать.)

Решая эту задачу по формуле

$$H = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

получим

$$v_0 = \frac{H}{t} + \frac{gt}{2}$$

и, подставив числовые данные, будем иметь:
в первом случае

$$v_0 = \frac{29,4}{6} + \frac{9,8 \cdot 6}{2} = 34,3 \text{ м/с};$$

во втором случае

$$v_0 = \frac{29,4}{3} + \frac{9,8 \cdot 3}{2} = 24,5 \text{ м/с}.$$

Таким образом, чтобы подняться на указанную высоту за 6 с, нужна начальная скорость 34,3 м/с, а чтобы сделать это за 3 с, требуется скорость 24,5 м/с. Почему для более быстрого подъема на ту же высоту требуется не большая начальная скорость, а меньшая?

8. Пусть точка движется так, что ее скорость возрастает пропорционально пройденному пути. Тогда

$$v - v_0 = ks, \quad (1)$$

где v_0 — скорость в начальный момент, s — пройденный путь и k — коэффициент пропорциональности. Исследуем это движение в случае $v_0 = 0$, т. е. когда

$$v = ks. \quad (2)$$

Пусть за время t точка проходит путь s . Тогда

$$t = s/\bar{v},$$

где \bar{v} — средняя скорость движения. Далее, так как скорость этой точки все время возрастает, то $\bar{v} < v$, откуда

$$t > s/v.$$

Подставляя теперь сюда v из (2), получим

$$t > 1/k,$$

что, конечно, нелепо, ибо время t -мы выбираем произвольно. Почему получился такой странный результат?

9. Доска перемещается с помощью катков (рис. 1). Скорость верхней точки каждого катка равна 1 м/с . С какой скоростью перемещаются точки касания доски с катками?

10. Диск радиуса R обкатывает неподвижный диск радиуса $2R$ и делает вокруг него один оборот (рис. 2). Сколько раз обворачивается он за это время вокруг своей оси?

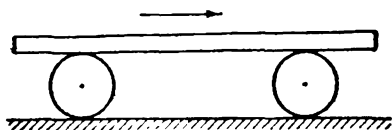


Рис. 1.

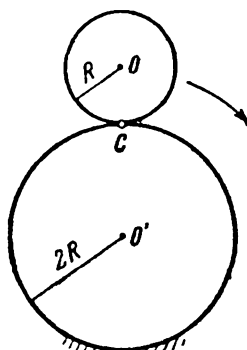


Рис. 2

11. Диск радиуса R обкатывает неподвижный диск радиуса $2R$ изнутри (рис. 3). Пусть центр малого диска совершит один оборот вокруг центра большого. Сколько раз обернется за это время малый диск вокруг своей оси?

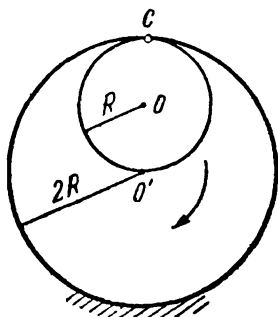


Рис. 3.

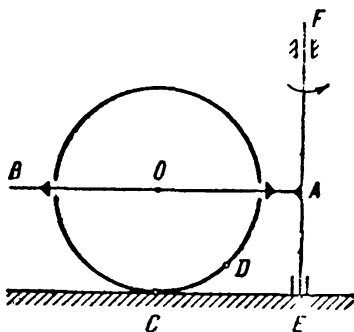


Рис. 4.

12. Шар насажен на стержень AB , вокруг которого может вращаться (рис. 4). При вращении стержня AB вокруг вертикальной оси EF шар катится по горизонтальной плоскости. Доказать, что на шаре имеются

точки D , мгновенные скорости которых направлены назад (т. е. противоположно скорости центра шара).

13. В первой системе координат точки A и B движутся по параллельным прямым, а во второй — по пересекающимся. Привести пример такого движения.

14. В первой системе координат точка движется по прямой, а во второй — по окружности. Привести пример такого движения.

15. Точка A движется со скоростью 1 м/с , а точка B — со скоростью 2 м/с , причем скорость точки B все время направлена так же, как скорость точки A . Может ли расстояние AB оставаться постоянным?

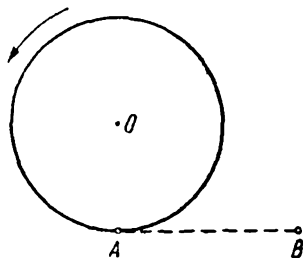


Рис. 5.

16. Круглая горизонтальная платформа вращается вокруг своей оси (рис. 5). На платформе стоит наблюдатель A , а на земле — наблюдатель B , расположенный так, что OB вдвое больше OA . В момент, когда наблюдатель A занимает

положение, показанное на чертеже, он движется на наблюдателя B со скоростью 1 м/с . С какой скоростью движется в этот момент наблюдатель B относительно наблюдателя A ?

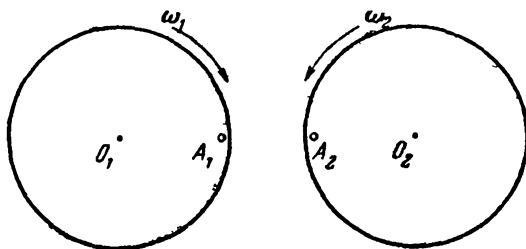


Рис. 6.

17. На платформах, расположенных рядом и вращающихся в противоположных направлениях, находятся наблюдатели A_1 и A_2 , занимающие в данный момент положения, показанные на чертеже (рис. 6). Дано: $O_1O_2 = 5 \text{ м}$, $O_1A_1 = O_2A_2 = 2 \text{ м}$, $\omega_1 = \omega_2 = 1 \text{ рад/с}$.

С какой скоростью наблюдатель A_2 движется в данный момент относительно наблюдателя A_1 ?

18. Груз P поднимается при помощи двух неподвижных блоков (рис. 7). Пусть скорости точек A и B

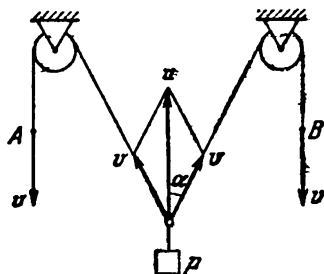


Рис. 7.

равны v , а скорость груза равна u . Из чертежа получаем

$$u = 2v \cos \alpha.$$

Правильен ли этот результат?

19. Нить AB приводит в движение стержень OA , шарнирно укрепленный в точке O (рис. 8). Найти скорость точки A , зная скорость v и угол α .

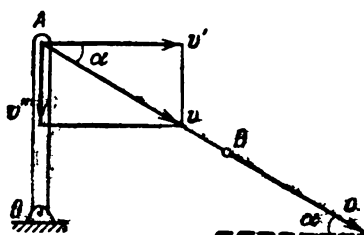


Рис. 8.

Решая эту задачу, учащийся перенес вектор v из точки B в точку A и, разложив его на составляющие v' и v'' , нашел, что искомая скорость равна

$$v' = v \cos \alpha.$$

Верно ли это решение?

20. Окружность равномерно катится по прямой (рис. 9). Если мысленно заменить ее многоугольником с очень большим числом сторон, то движение окружности можно будет рассматривать как последовательность бесконечно малых поворотов вокруг вершин этого многоугольника. Другими словами, в каждый момент времени эта окружность как бы вращается вокруг своей нижней точки. Отсюда приходим к выводу, что скорость точки B равна

$$v_B = 2v_O,$$

а ее ускорение равно

$$a_B = \frac{v_B^2}{BC} = \frac{(2v_O)^2}{2R} = \frac{2v_O^2}{R}.$$

Верны ли полученные соотношения?

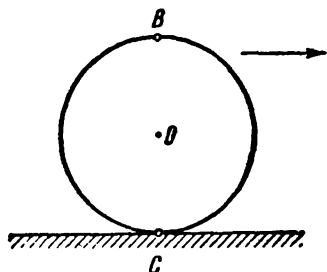


Рис. 9.

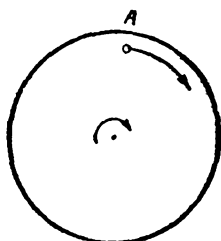


Рис. 10

21. По краю равномерно вращающейся платформы идет человек, движущийся с постоянной скоростью (точка A на рис. 10). Так как платформа вращается, то человек участвует в двух движениях: собственном и вместе с платформой. В первом из этих движений он имеет ускорение $0,5 \text{ м/с}^2$, а во втором — ускорение 2 м/с^2 . Найти абсолютное ускорение человека.

СТАТИКА

22. Что тяжелее: ящик мелкой дроби или такой же ящик крупной дроби?

23. К доске, лежащей на опорах A и B , приложены силы F_1 и F_2 (рис. 11). Изменится ли прогиб доски, если заменить эти силы их равнодействующей R ?

24. На двух нитях висит шар (рис. 12). Разложив силу тяжести P на составляющие F_1 и F_2 , приходим к выводу, что сила F_1 уравнивается реакцией правой нити, а сила F_2 останется неуравновешенной. Следовательно, шар станет двигаться вправо. Указать ошибку в этом рассуждении.

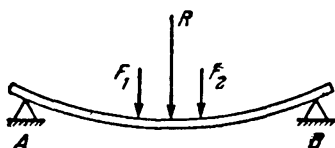


Рис. 11.

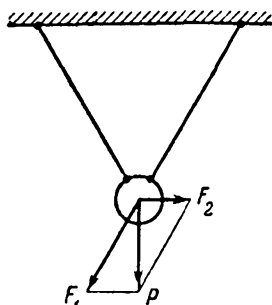


Рис. 12.

25. Пусть паровоз начинает двигаться из положения, показанного на рис. 13. В этом положении шатун

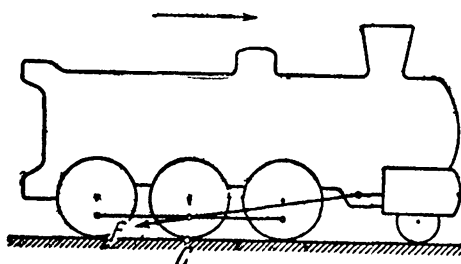


Рис. 13.

действует на колесо с некоторой силой F , направленной влево и проходящей выше точки C . Но так как эта точка является центром, вокруг которого в данный момент вращается колесо, то под действием силы F оно должно поворачиваться против часовой стрелки, т. е. катиться влево. Однако ясно, что паровоз станет двигаться вправо. Почему?

26. Балка висит на четырех тросах, как показано на рис. 14. Разложив силу тяжести P на две параллельные силы, приходим к выводу, что на нижние концы каждой пары нитей действует сила $P/2$. Разложив затем каждую из сил $P/2$ по правилу параллелограмма,

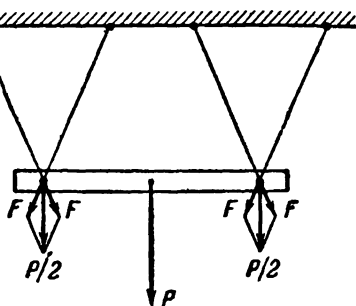


Рис. 14.

находим силы F , растягивающие тросы. Верно ли это рассуждение?

27. Однородный стержень AB шарнирно укреплен в точке A и опирается о неподвижную тележку, как показано на рис. 15. Коэффициент трения в точке B ра-

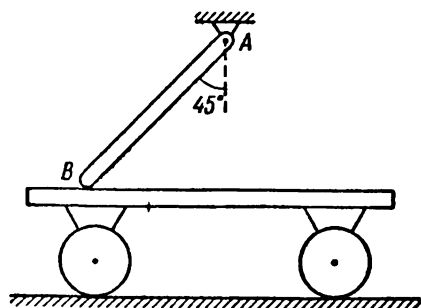


Рис. 15.

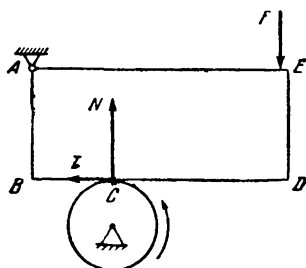


Рис. 16.

вен 0,3, а сила давления стержня на тележку равна N . Сдвинется ли тележка влево, если приложить к ней горизонтальную силу $0,25 N$?

28. Тормозная колодка $ABDE$ прижата силой F к шкиву, вращающемуся против часовой стрелки (рис. 16). Пусть $AB = 10$ см, $AE = 20$ см, $BC = 5$ см, $F = 20$ Н,

Найдем силу трения между колодкой и шкивом в случае, когда коэффициент трения равен 0,6.

Рассмотрим силы, действующие на колодку. Ими являются сила F , реакция шкива N и сила трения $T = kN$, где k — коэффициент трения. Так как колодка находится в покое, то сумма моментов этих сил относительно точки A равна нулю. Следовательно,

$$F \cdot AE - N \cdot BC + kN \cdot AB = 0,$$

откуда

$$N = F \frac{AE}{BC - k \cdot AB}, \quad T = kN = F \frac{k \cdot AE}{BC - k \cdot AB};$$

подставив числовые данные, получим

$$T = 20 \frac{0,6 \cdot 20}{5 - 0,6 \cdot 10} = -240 \text{ Н},$$

т. е. сила трения отрицательна. Что это значит?

29. Однородный стержень весом 50 Н опирается о гладкую стену и шероховатый пол, образуя с ним угол 60° (рис. 17). Чтобы сдвинуть этот стержень, понадобилась горизонтальная сила F величиной 20 Н. Какая сила трения при этом преодолевалась?

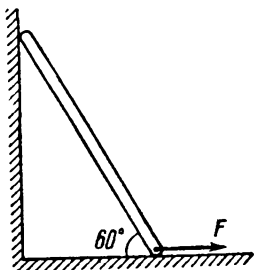


Рис. 17.

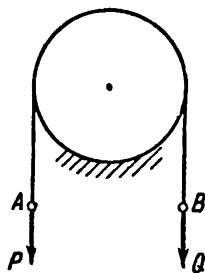


Рис. 18.

30. Через шероховатый шкив переброшена нить, к концам которой приложены силы P и Q по 60 Н каждая (рис. 18). Когда силу P начали постепенно увеличивать и это увеличение достигло 20 Н, точка A стала опускаться. В другой раз силу P стали не увеличивать, а уменьшать. На сколько надо ее уменьшить, чтобы точка A начала подниматься?

31. В каждую из вершин произвольного четырехугольника помещен точечный груз весом P . Находя центр тяжести этой системы, доказать теорему: *отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырехугольника, пересекаясь, делятся пополам.*

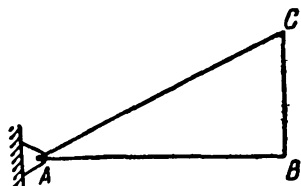


Рис. 19.

32. Призматический сосуд в форме прямоугольного треугольника ABC шарнирно укреплен на вертикальной оси A (рис. 19 изображает вид сверху; плоскость ABC горизонтальна). Если наполнить этот

сосуд газом и дать ему возможность вращаться вокруг оси A , то он, очевидно, будет оставаться в покое. Вывести отсюда теорему Пифагора.

ДИНАМИКА

33. Часто говорят, что существуют два действия силы: статическое, проявляющееся в деформации, и динамическое, проявляющееся в ускорении. Верно ли это?

34. Рассмотрим тела 1 и 2, показанные на рис. 20. Ускорение, с которым они движутся под действием силы F , равно



Рис. 20.

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}, \quad (1)$$

где m_1 — масса первого тела, а m_2 — второго. Найдем теперь силы взаимодействия

этих тел. Пусть сила, с которой первое тело действует на второе, равна F_{12} . Тогда для второго тела будем иметь

$$F_{12} = m_2 a,$$

или с учетом (1)

$$F_{12} = F \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (2)$$

Пусть, далее, сила, с которой второе тело действует на первое, равна F_{21} . Тогда для первого тела получим

$$F - F_{21} = m_1 a,$$

откуда

$$F_{21} = F - m_1 a,$$

что с учетом (1) дает

$$F_{21} = F - F \frac{m_1}{m_1 + m_2} = F \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

Сравнивая равенства (2) и (3), видим, что $F_{12} = F_{21}$, т. е. сила, с которой первое тело действует на второе, равна силе, с которой второе тело действует на первое. Таким образом, мы доказали третий закон Ньютона. Так ли это?

35. Шофер нажал тормозную педаль и автомобиль начал двигаться замедленно. Можно ли сказать, что силами, уменьшающими его скорость, являются силы трения колес о землю и силы трения колес о тормозные колодки?

36. В момент, когда трамвай имеет скорость 10 м/с, вожатый включает тормоза, и трамвай начинает двигаться «юзом». Найдем, каким должен быть коэффициент трения колес о рельсы, чтобы трамвай за 2 с прошел путь 8 м.

Так как $F = ma$, где F — сила трения, равная km_g , то

$$-km_g = ma, \quad a = -kg.$$

Далее, по формуле

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

получим

$$8 = 10 \cdot 2 - \frac{kg \cdot 2^2}{2},$$

откуда $k = 6/g \approx 0,61$. Верен ли этот ответ?

37. На гладкой горизонтальной плоскости лежат бруски 1 и 2, связанные пружиной (рис. 21). Рассмотрим

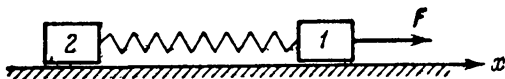


Рис. 21.

движение этой системы под действием силы F , приложенной к первому брусу и изменяющейся по гармоническому закону

$$F = F_0 \sin \omega t,$$

Так как бруски будут совершать гармонические колебания с частотой ω , то

$$a_1 = -\omega^2 x_1, \quad a_2 = -\omega^2 x_2,$$

где x_1 и x_2 — смещения брусков из их средних положений, а a_1 и a_2 — их ускорения. (Как известно, ускорение точки, колеблющейся по гармоническому закону, равно $a = -\omega^2 x$.) Поэтому для бруска 2 будем иметь

$$F' = m_2 a_2 = -m_2 \omega^2 x_2,$$

где m_2 — масса второго бруска, а F' — сила, действующая на этот брусок со стороны пружины. С другой стороны, эта сила равна

$$F' = c(x_1 - x_2),$$

где c — жесткость пружины. Поэтому

$$c(x_1 - x_2) = -m_2 \omega^2 x_2,$$

откуда

$$x_1 = \frac{c - m_2 \omega^2}{c} x_2.$$

Пусть теперь c и m_2 таковы, что

$$c = m_2 \omega^2.$$

Тогда получим $x_1 = 0$, т. е. первый брусок не будет колебаться. Как истолковать этот странный результат?

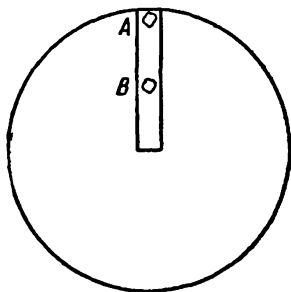


Рис. 22.

38. Вообразим, что на Северном полюсе вырыт колодец, доходящий до центра Земли и что из него удален воздух (рис. 22). Пусть камень, не имеющий начальной скорости, начинает падать из некоторой точки этого колодца. В каком случае он быстрее достигнет дна: если начнет падать из точки A или из точки B?

39. Вообразим, что между Москвой и Ленинградом прорыт прямолинейный тоннель, в котором проложен железнодорожный путь (рис. 23). Если у московского конца этого тоннеля поставить вагон, то он начнет дви-

гаться к Ленинграду, причем его скорость будет сначала увеличиваться, а когда он пройдет середину тоннеля, станет уменьшаться (ибо сначала он будет двигаться «под гору», а после середины тоннеля — «в гору»). Если считать, что из тоннеля удален воздух и на вагон не действуют никакие силы трения, то он дойдет до Ленинграда и остановится. (Здесь его надо будет

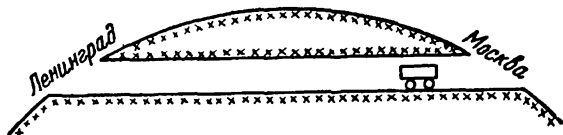


Рис 23.

задержать, чтобы он не скатился обратно.) Сколько времени будет продолжаться такое путешествие? На что уйдет больше времени: на движение по такому тоннелю от Москвы до Ленинграда или от Москвы до Владивостока?

40. Конический маятник представляет собой шарик A , прикрепленный к нити OA и описывающий окружность в горизонтальной плоскости (рис. 24). Масса шарика равна m , а угол отклонения нити от вертикали равен α . Нужно найти натяжение нити.

Один из учащихся считал, что так как шарик не движется вдоль OA , то равнодействующая всех сил, которые действуют в этом направлении, равна нулю. Поэтому

$$T - mg \cos \alpha = 0,$$

откуда $T = mg \cos \alpha$.

Другой же учащийся считал, что так как шарик не движется в направлении вертикали, то равна нулю сумма всех сил, действующих в вертикальном направлении. Поэтому

$$T \cos \alpha - mg = 0,$$

откуда $T = mg / \cos \alpha$.

Какое из этих рассуждений неправильно?

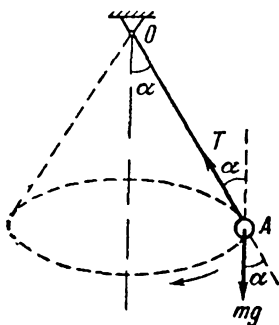


Рис. 24.

41. В точке A диска, вращающегося вокруг вертикальной оси, прикреплена пружина, на другом конце которой закреплен шарик B массой $0,02$ кг (рис. 25). Пружина имеет жесткость 100 Н/м, расстояние OA равно $0,05$ м, длина пружины в нерастянутом состоянии равна $0,1$ м. Вычислим длину пружины при вращении диска с угловой скоростью $\omega = 100$ рад/с.

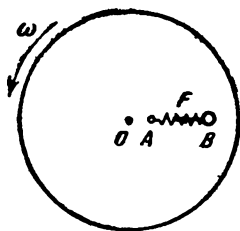


Рис. 25.

Пусть длина нерастянутой пружины равна x_0 , а длина растянутой равна x . Тогда упругая сила F , действующая на шарик, будет равна

$$F = c(x - x_0),$$

где c — жесткость пружины. Подставив сюда $c = 100$ Н/м и $x_0 = 0,1$ м, будем иметь

$$F = 100(x - 0,1) = 100x - 10. \quad (1)$$

Но сила F является центростремительной, и поэтому

$$F = m\omega^2 \cdot OB = m\omega^2(OA + AB) = m\omega^2(OA + x),$$

что при $m = 0,02$ кг, $\omega = 100$ рад/с, $OA = 0,05$ м дает

$$F = 0,02 \cdot 100^2(0,05 + x) = 10 + 200x. \quad (2)$$

Приравнявая теперь (1) и (2), получим

$$100x - 10 = 10 + 200x,$$

откуда $x = -0,2$ м, т. е. длина пружины будет отрицательной. Как это понимать?

42. Вертикальный вал вращается с угловой скоростью ω . С валом шарнирно связан тонкий невесомый стержень $AB = l = 0,1$ м (рис. 26). На конце стержня укреплен шар B . Найдем угол отклонения стержня от вертикали в случае $\omega = 14$ рад/с и $\omega = 7$ рад/с.

На шар действуют сила тяжести mg и сила N со стороны стержня (реакция стержня). Так как их равнодействующая является центростремительной силой, то она должна быть направлена так, как показано на рис. 26. Отсюда заключаем, что

$$R = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Далее, так как

$$R = m\omega^2 \cdot BC = m\omega^2 \cdot AB \sin \alpha = m\omega^2 l \sin \alpha,$$

то

$$m\omega^2 l \sin \alpha = mg \tan \alpha.$$

Решая это уравнение, будем иметь

$$m\omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha = mg \sin \alpha,$$

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}.$$

Полученное равенство определяет угол α . Подставив сюда $l = 0,1$ м и $\omega = 14$ рад/с, найдем

$$\cos \alpha = \frac{9,8}{14^2 \cdot 0,1} = \frac{1}{2},$$

откуда $\alpha = 60^\circ$. Однако при $\omega = 7$ рад/с получим

$$\cos \alpha = \frac{9,8}{7^2 \cdot 0,1} = 2,$$

что невозможно, так как $\cos \alpha$ не может быть больше единицы.

Чем объясняется полученный результат и каково значение α при $\omega = 7$ рад/с?

43. На наклонной плоскости лежит монета, удерживаемая силой трения (рис. 27). Как будет она двигаться, если сообщить ей скорость в направлении, параллельном AB ? Будет ли ее движение прямолинейным?

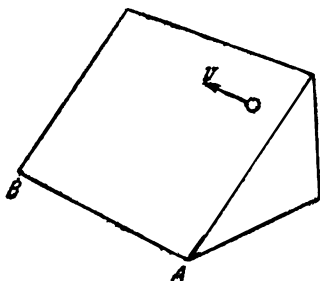


Рис. 27.

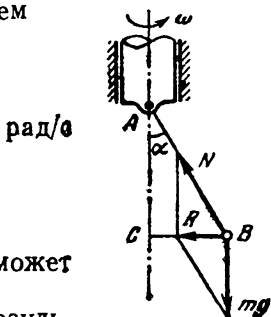


Рис. 26.

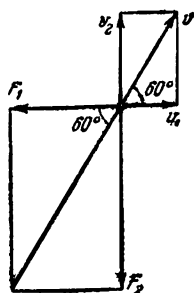


Рис. 28.

44. Шар движется в воздухе, имея в данный момент скорость v , направленную так, как показано на рис. 28. Поскольку сила сопротивления воздуха пропорциональна квадрату скорости, то, обозначив ее через F , будем

иметь

$$F = kv^2, \quad (1)$$

где k — коэффициент пропорциональности. С другой стороны, разложив силу F на составляющие F_1 и F_2 , а скорость v на составляющие v_1 и v_2 , получим

$$v_1 = v \cos 60^\circ, \quad v_2 = v \sin 60^\circ, \\ F_1 = kv_1^2 = kv^2 \cos^2 60^\circ, \quad F_2 = kv_2^2 = kv^2 \sin^2 60^\circ.$$

Следовательно, полная сила сопротивления равна

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{(kv^2 \cos^2 60^\circ)^2 + (kv^2 \sin^2 60^\circ)^2} = \\ = \sqrt{\left(kv^2 \cdot \frac{1}{4}\right)^2 + \left(kv^2 \cdot \frac{3}{4}\right)^2} = kv^2 \sqrt{\frac{5}{8}}, \quad (2)$$

что не совпадает с (1). Почему?

45. На наклонной плоскости с углом $\alpha = 30^\circ$ лежит брусок (рис. 29). Коэффициент трения между бруском

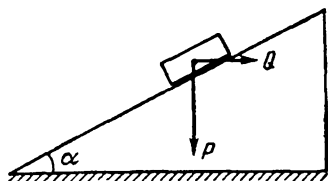


Рис. 29.

и плоскостью равен 0,2, на брусок действует сила тяжести P и горизонтальная сила $Q = 0,5 P$. Считая, что начальная скорость бруска равна нулю, найдем ускорение, с которым он будет двигаться.

Будем считать, что брусок движется *вверх*. Тогда движущей силой будет $Q \cos \alpha$, а тормозящими — сила $P \sin \alpha$ и сила трения kN , где k — коэффициент трения, а N — давление бруска на плоскость. Учитывая, что $N = P \cos \alpha + Q \sin \alpha$, $kN = k(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)$, получаем

$$a = \frac{Q \cos \alpha - P \sin \alpha - k(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)}{P/g},$$

где a — искомое ускорение. Подставив сюда $Q = 0,5 P$, $\alpha = 30^\circ$, $k = 0,2$, получим $a = -0,29 g$. Так как найденное ускорение отрицательно, приходим к выводу, что брусок будет двигаться не *вверх*, а *вниз*.

Вычислим теперь ускорение бруска, считая, что он движется *вниз*. В этом случае движущей силой будет $P \sin \alpha$, а тормозящими — сила $Q \cos \alpha$ и сила kN , равная

$$k(P \cos \alpha + Q \sin \alpha).$$

Следовательно,

$$a = \frac{P \sin \alpha - Q \cos \alpha - k(P \cos \alpha + Q \sin \alpha)}{P/g};$$

и подставив заданные значения Q , α и k , получим $a = -0,16g$. Но так как это ускорение отрицательно, приходим к выводу, что брусок будет двигаться не вниз, а вверх.

Таким образом, предполагая, что брусок движется вверх, мы пришли к заключению, что он будет двигаться вниз, а предполагая, что он движется вниз, пришли к выводу, что он станет двигаться вверх. Как понимать это противоречие?

46. На поверхности стола лежала монета (рис. 30). В первом опыте ей сообщили скорость v_1 , во втором — скорость v_2 и в третьем — обе скорости одновременно (т. е. скорость v , равную геометрической сумме скоростей v_1 и v_2). При этом в первом случае она прошла до остановки путь 30 см, во втором — путь 40 см и в третьем — путь s . Вычислить s . (Скорости v_1 и v_2 неизвестны.)

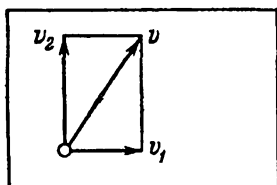


Рис. 30.

47. Автомобиль движется со скоростью 15 м/с. В каком случае он быстрее остановится: если тормозить его так, чтобы он «шел юзом», или так, чтобы он был очень близок к «юзу», но двигался без проскальзывания?

48. Через неподвижный блок переброшен длинный канат, на концах которого висят два гимнаста одинакового веса. Гимнасты находятся на одной высоте над землей и вначале неподвижны. Затем первый начинает подниматься со скоростью 0,2 м/с относительно каната, а второй — со скоростью 0,1 м/с относительно каната. Кто из них раньше достигнет блока? (Канат и блок невесомы, трение в блоке отсутствует.)

49. Решить предыдущую задачу, считая, что второй гимнаст не поднимается по канату, а опускается.

50. Как известно, силой, движущей поезд, является сила трения колес тепловоза о рельсы. Сила же трения между рельсами и колесами вагонов является тормозящей. Но колеса тепловоза и вагонов сделаны из одного и того же материала, а вес вагонов гораздо больше

веса тепловоза. Поэтому сила трения между рельсами и вагонами должна быть как будто больше силы трения между рельсами и тепловозом. Почему же тепловоз в состоянии двигать состав?

51. По горизонтальной плоскости катится круглый диск (рис. 31). Так как сила трения F направлена вправо, то скорость диска будет уменьшаться. Но момент этой силы относительно центра O направлен против часовой стрелки, и, следовательно, скорость вращения диска должна увеличиваться. Разрешить полученное противоречие.

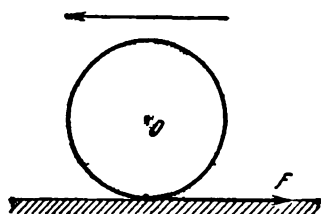


Рис. 31.

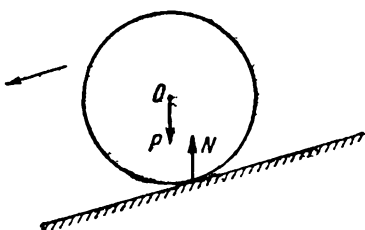


Рис. 32.

52. Колесо катится вниз по чуть-чуть наклоненной плоскости (рис. 32). Так как движение колеса сопровождается энергетическими потерями в точке контакта с плоскостью, то даже при отсутствии сопротивления воздуха колесо будет катиться равномерно (начиная с некоторого момента). Отсюда следует, что сила N , с которой плоскость действует на колесо, должна быть направлена вверх и равняться силе тяжести P . Но тогда сила N будет создавать вращающий момент относительно центра O , и, следовательно, колесо будет вращаться не равномерно, а ускоренно. Разрешить полученное противоречие.

53. Автомобиль, у которого все колеса ведущие, равномерно движется по прямолинейной горизонтальной дороге. С какой силой действует дорога на каждое из его колес? (Считать, что сопротивление воздуха отсутствует и все колеса находятся в одинаковых условиях, т. е. на каждое из них приходится одна и та же нагрузка и к каждому подводится одна и та же мощность.)

54. Прочтя решение предыдущей задачи, учащийся сказал: «Если сила, действующая на колесо со стороны земли, не имеет горизонтальной составляющей, то она не создает момента относительно центра колеса. Но так как к колесу приложен вращающий момент со стороны двигателя, то оно должно вращаться ускоренно, а это противоречит тому, что автомобиль движется равномерно». Разрешить противоречие.

55. Неподвижная материальная точка O притягивает материальную точку M по закону всемирного тяготения (рис. 33). Если точка M начнет двигаться из положения M_0 , не имея начальной скорости, то, дойдя до точки O , столкнется с ней. Чтобы этого не произошло, сообщим точке M ничтожно малую начальную скорость в направлении, перпендикулярном OM_0 . Тогда она будет двигаться почти прямолинейно, но, дойдя до точки O , не столкнется с ней и сможет продолжать свое движение дальше. Как далеко уйдет она влево?

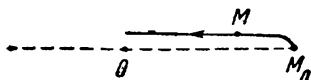


Рис. 33.

56. В системе, показанной на рис. 34, отсутствует трение, а нити и блоки не имеют массы. Станут ли крайние грузы опускаться, если массу одного из них увеличить на 0,03 кг, а другого — на 0,1 кг?

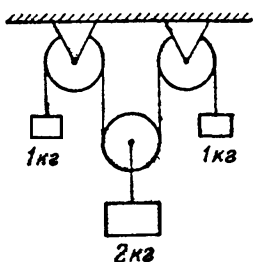


Рис. 34.

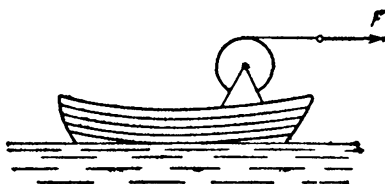


Рис. 35.

57. Лодку подтягивают к берегу с помощью каната, намотанного на массивный вал, как показано на рис. 35. В каком случае лодка быстрее достигнет берега: если вал будет зажат или если он будет иметь возможность свободно вращаться? (Сила F в обоих случаях одна и та же. Сопротивление воды не учитывать.)

58. Однородное тело находится в покое (рис. 36). К точкам A и B приложили две равные силы F_1 и F_2 , направленные в противоположные стороны. В каком направлении станет двигаться точка B ?

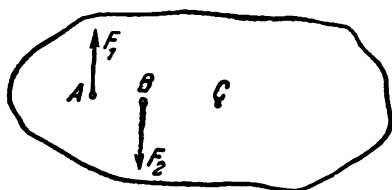


Рис. 36.

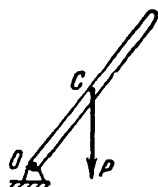


Рис. 37.

59. Стержень, шарнирно закрепленный в точке O , начинает двигаться из положения, показанного на рис. 37. Так как его угловое ускорение пропорционально моменту силы P , то можно сделать вывод, что именно эта сила приводит стержень во вращение. Так ли это?

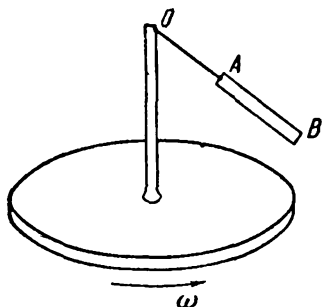


Рис. 38.

60. Нить OA и стержень AB укреплены на платформе, как показано на рис. 38. Платформа вращается (с постоянной скоростью), вследствие чего нить и стержень отклонены от вертикали. Будут ли точки O , A , B лежать на одной прямой?

61. Прочтя условие предыдущей задачи, учащийся сказал: «Будут, ибо если бы эти

точки не лежали на одной прямой, то сила, действующая на стержень со стороны нити, создавала бы вращающий момент относительно центра тяжести стержня и под действием этого момента стержень стал бы поворачиваться в плоскости чертежа». Прав ли он?

62. Рассмотрим груз, висящий на длинной нити (отвес). Так как он притягивается не только к Земле, но и к Солнцу, то должен утром слегка отклоняться к Востоку, а вечером — к Западу. Так ли это?

63. Земной шар можно рассматривать как гигантский космический корабль, движущийся вокруг Солнца. Поэтому все предметы на поверхности Земли должны

быть невесомы по отношению к гравитационным силам Солнца, Луны и других небесных тел. Почему же притяжение Луны вызывает морские приливы?

64. На рис. 39 схематически показано поперечное сечение космического корабля, вращающегося вокруг своей продольной оси. Так как в системе координат, жестко связанной с этим кораблем, действует поле центробежной силы инерции, то все предметы в этом корабле будут давить на свои опоры, т. е. будут иметь некоторый «искусственный вес». Пусть теперь находящийся в таком корабле космонавт выпускает из рук шар в точке A_0 (рис. 39). С точки зрения космонавта последующее движение шара объясняется просто: так как на шар действует центробежная сила инерции, то он станет двигаться от центра O и через некоторое время «упадет на пол» в точке B_0 . А как объяснить поведение этого шара с точки зрения наблюдателя, не участвующего во вращении корабля?

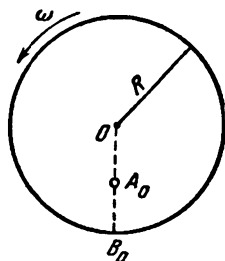


Рис 39.

65. Шар, о котором говорится в предыдущей задаче, выпускают в точке A_0 (рис. 39). Пусть $R = 10$ м, $A_0B_0 = 2$ м. В каком месте корабля шар упадет?

66. Решить предыдущую задачу в случае $R = 10$ м, $A_0B_0 = 7,8$ м. Показать, что в этом случае шар упадет не «на пол», а «на потолок».

67. В космическом корабле с искусственной тяжестью (см. задачу 64) было обнаружено следующее явление: если шару, находящемуся в точке A_0 , сообщить подходящую скорость в направлении, перпендикулярном A_0B_0 , то он будет двигаться «параллельно» полу, оставаясь на одной и той же «высоте» (т. е. будет описывать окружность с центром в точке O). Чем это объясняется?

68. Известно, что на полюсах Земли сила тяжести чуть-чуть больше, чем на экваторе (примерно на 0,2%). В некоторых книгах это объясняется так: поскольку Земля немного сплюснута у полюсов, то, перенося тело с экватора на полюс, мы приближаем его к центру Земли и тем самым увеличиваем силу притяжения к этому центру. Верно ли это объяснение?

69. На столе стоят работающие песочные часы. Масса часов с песчинками равна M , а масса песчинок, находящихся в состоянии падения, равна m . С какой силой давят часы на стол?

70. Внутри лифта установлен массивный горизонтальный вал, приводимый во вращение с помощью груза и невесомой нити (рис. 40). Когда лифт был неподвижен, груз опускался с ускорением 2 м/с^2 . Как будет двигаться груз относительно земли, если лифт станет подниматься с ускорением 2 м/с^2 ?

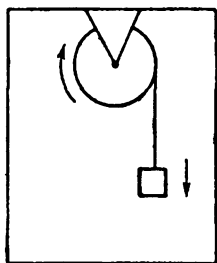


Рис. 40.

71. Пассажир поезда давит на переднюю стенку вагона с силой F . Совершает ли эта сила работу?

72. Вообразим, что скорость вращения Земли уменьшилась настолько, что продолжительность суток возросла на одну секунду. Какая кинетическая энергия освободилась бы при этом? Предположим, что найден способ превращения этой энергии в электрическую. На сколько времени хватило бы ее человечеству? (Масса Земли $6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, мировая добыча электроэнергии — около $2 \cdot 10^{10} \text{ Дж}$ в год. Момент инерции шара $I = \frac{2}{5}mR^2$, где m — масса шара, а R — его радиус.)

73. Два рыбака тянут к берегу лодку, действуя на нее с постоянными силами. Если бы ее тянул лишь первый рыбак, она подошла бы к берегу со скоростью $0,3 \text{ м/с}$, а если бы тянул только второй — со скоростью $0,4 \text{ м/с}$. С какой скоростью подойдет лодка к берегу, когда ее тянут оба рыбака? (Сопротивление воды не учитывать.)

74. Поезд идет со скоростью v . С площадки заднего вагона человек бросает камень в направлении, противоположном движению поезда. Пусть скорость камня относительно поезда тоже равна v . Тогда абсолютная скорость камня будет равна нулю и поэтому будет равна нулю его кинетическая энергия. Но до того как камень был брошен, он обладал некоторой кинетической энергией (так как двигался вместе с поездом). Следовательно, бросая камень, человек не увеличил его кинетическую энергию, а уменьшил. На что же была затрачена работа, совершенная человеком?

75. Поезд, состоящий из платформ с песком, движется со скоростью u . Пуля массой m , летящая со скоростью u , догоняет поезд и застревает в песке. Сколько тепла выделилось при ударе пули?

Один из решавших эту задачу считал, что так как пуля потеряла энергию $mu^2/2 - mv^2/2$, то ровно столько и выделилось тепла. Другой же считал, что так как скорость пули относительно поезда равна $u - v$, то количество выделившегося тепла равно $m(u - v)^2/2$. Какое из этих соображений верно?

76. На рис. 39 показано поперечное сечение космического корабля с искусственной тяжестью (см. задачу 64). Пусть человек, находящийся в этом корабле, поднимается по лестнице, ведущей из точки B_0 в точку A_0 . Так как на него действует «центробежная сила тяжести», то для такого подъема ему придется совершить работу. На что она будет затрачена?

77. Два одинаковых сосуда, содержащие одинаковое число атомов гелия, соединены краном. В первом сосуде средняя скорость атомов равна 1000 м/с, а во втором — 2000 м/с. Какой будет эта скорость, если открыть кран и сделать сосуды сообщающимися?

78. Учащийся: «Если к поезду добавить сзади второй паровоз, то сила, движущая состав, станет вдвое большей и, кроме того, удвоится мощность, затрачиваемая на движение состава. Но из формулы $N = Fv$ видно, что если удвоить N и F , то v не изменится, т. е. скорость поезда останется прежней. Как это понимать?»

Преподаватель: «В Вашем рассуждении содержится ошибка.»

Какая?

79. В вагоне висит стержень длиной l (рис. 41). Вагон движется с постоянной скоростью u , а затем мгновенно останавливается. На какой угол отклонится стержень?

Один из решавших эту задачу рассуждал так: «Поскольку стержень обладал кинетической энергией,

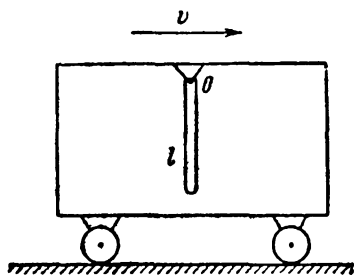


Рис 41

которая затем перешла в потенциальную, то

$$\frac{mv^2}{2} = mgh,$$

где h — высота, на которую поднимается центр тяжести стержня; но легко видеть, что

$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \alpha$$

и поэтому

$$\frac{mv^2}{2} = mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \alpha \right),$$

откуда

$$\cos \alpha = 1 - \frac{v^2}{gl} *.$$

Верно ли это решение?

80. Пусть космической ракете сообщена вертикальная скорость 11,2 км/с. Как известно, такая ракета будет неограниченно удаляться от Земли, а ее скорость будет неограниченно уменьшаться (если не учитывать влияния других небесных тел). Таким образом, ее предельная скорость, или, иначе говоря, скорость в бесконечности, будет равна нулю. Пусть теперь ракете сообщена вертикальная скорость 12,2 км/с. Какова будет ее скорость в бесконечности? Будет ли она равна $12,2 - 11,2 = 1$ км/с?

81. Из пушки, не имеющей противооткатного устройства, производилась стрельба в горизонтальном направлении. Когда пушка была неподвижно закреплена, снаряд вылетел со скоростью 500 м/с, а когда пушке дали возможность свободно откатываться назад, снаряд вылетел со скоростью 499 м/с. С какой скоростью откатилась при этом пушка?

Один из решавших эту задачу сказал: «Так как скорость снаряда относительно пушки равна 500 м/с, то скорость отката равна 1 м/с.» Верно ли это?

82. Когда поезд увеличивает свою скорость, увеличивается и скорость сидящего в вагоне пассажира. Ясно, что его кинетическая энергия увеличивается за счет работы тепловоза. Пусть теперь пассажир этого поезда равномерно идет по вагону в направлении движения. В этом случае его кинетическая энергия, очевидно, тоже будет увеличиваться (вследствие увеличения скорости поезда). За счет чего?

83. Тела A и B удалены от других тел и не взаимодействуют с ними. Тело A действует на тело B с некоторой силой, совершающей положительную работу. Уменьшается ли при этом энергия тела A ?

84. Учащиеся A и B обсуждают решение задачи:

A : Пусть камень брошен вертикально вверх со скоростью $v_0 = 10$ м/с и нужно найти высоту его подъема. Тогда

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh, \quad (1)$$

откуда

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 9,8} \approx 5 \text{ м.}$$

Это очень простая задача, и приведенное решение не вызывает никаких сомнений.

B : Конечно.

A : Однако попробуем решить эту задачу другим способом. Учтем, что Земля движется вокруг Солнца со скоростью 30 км/с и, следовательно, начальная скорость камня гораздо больше 10 м/с. Тогда для высоты h получится другое значение.

B : Этого не может быть.

A : Вот как я рассуждал. Пусть скорость Земли в ее орбитальном движении равна u (рис. 42). Так как вращение Земли не имеет в этой задаче принципиального значения, то я считал, что Земля не вращается. (Можно вообразить, что камень бросают не с Земли, а с какой-нибудь другой планеты, которая движется поступательно.) Пусть начальная скорость камня относительно Земли равна v_0 и направлена так же, как скорость u . Тогда «истинная» начальная скорость камня будет равна $u + v_0$, а его начальная кинетическая энергия будет иметь величину

$$T_0 = \frac{m(u + v_0)^2}{2}.$$

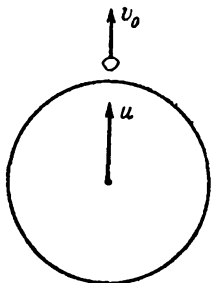


Рис. 42.

Далее, когда камень достигнет максимальной высоты h над Землей, его скорость станет равной u (ибо в этот момент его скорость относительно Земли обратится в нуль). Поэтому на высоте h кинетическая энергия

камня равна

$$T = \frac{mu^2}{2},$$

и по закону сохранения энергии получаем

$$\frac{m(u + v_0)^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = mgh, \quad (2)$$

откуда

$$h = \frac{(u + v_0)^2 - u^2}{2g} = \frac{v_0(2u + v_0)}{2g}. \quad (3)$$

Подставив сюда числовые данные, будем иметь

$$h = \frac{10(2 \cdot 30\,000 + 10)}{2 \cdot 9,8} \approx 30\,000 \text{ м} = 30 \text{ км}.$$

Таким образом, высота h получается значительно больше вычисленной с помощью равенства (1).

Б: Это очень странно. Я думаю, что ошибка содержится в равенстве (2). Например, можно ли начальную скорость камня считать равной $u + v_0$? Ведь u обозначает скорость Земли до бросания камня, а в момент бросания скорость Земли становится немного меньшей (вследствие «отдачи»).

А: Но это уменьшение ничтожно!

Б: Конечно, но кто знает...

А: Хорошо, пусть тогда u обозначает скорость Земли непосредственно после бросания камня. В этом случае уравнение (2) будет верным и, подставив в равенство (3) не $u = 30\,000 \text{ м/с}$, а число чуть-чуть меньшее, мы получим почти тот же результат.

Б: Согласен, но в уравнении (2) все-таки не все ясно. Почему в левой части этого уравнения стоит уменьшение кинетической энергии камня, а не рассматриваемой системы?

А: Какой системы?

Б: Системы камень — Земля. Ведь когда камень удаляется от Земли, он притягивает Землю к себе и увеличивает ее скорость. Следовательно, он увеличивает и ее кинетическую энергию.

А: Но масса Земли колоссальна и камень увеличивает ее скорость на ничтожную величину!

Б: Да. Увеличение скорости Земли будет очень небольшим, но именно потому, что масса Земли колоссальна, ее кинетическая энергия может заметно увеличиться. Ведь если M очень велико, то даже небольшого изменения u достаточно, чтобы заметно изменить $Mu^2/2$.

А: Возможно. Но то же самое можно сказать и о решении с помощью равенства (1), т. е. о решении, не учитывающем орбитальной скорости Земли. Ведь если считать, что Земля не движется вокруг Солнца, а «висит» в мировом пространстве, то удаляющийся от Земли камень все равно будет ее притягивать и, следовательно, будет сообщать ей кинетическую энергию. Почему же мы этого не учитываем? Если потому, что скорость Земли изменяется ничтожно мало, то это верно и в случае решения с помощью уравнения (2)!

Б: Действительно странно. Не знаю...

Разъясните вопрос.

85. Земля движется вокруг Солнца со скоростью $u = 30$ км/с. Метеорит, движущийся как показано на рис. 43, падает на поверхность Земли со скоростью $v = 5$ км/с (относительно Земли). Что больше: тепло, выделившееся при ударе метеорита, или вызванное этим ударом увеличение кинетической энергии Земли? Во сколько раз?

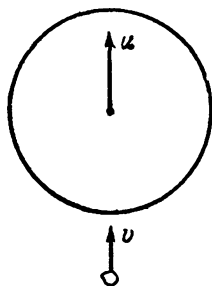


Рис. 43.

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

86. Трубки, из которых частично удален воздух, погружены в два одинаковых сосуда, наполненные водой

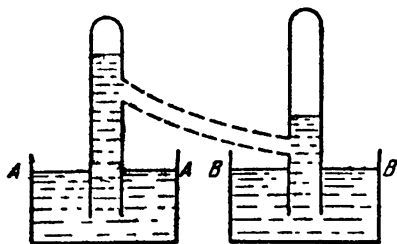


Рис. 44.

до одного и того же уровня (рис. 44). Будет ли переливаться вода из левой трубки в правую, если соединить эти трубки так, как показано на рисунке пунктиром?

87. Решить предыдущую задачу в случае, когда уровень AA ниже уровня BB .

88. Перевернутый стакан наполнен водой и подвешен на нити как показано на рис. 45. (Кромка стакана касается поверхности воды в нижнем сосуде.) Вес стакана равен P , а вес находящейся в нем воды равен P' . Каково натяжение нити, на которой висит стакан?

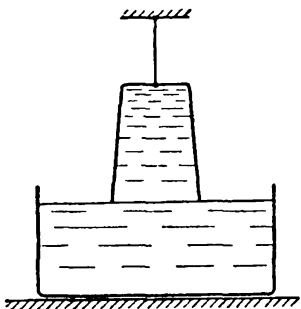


Рис. 45.

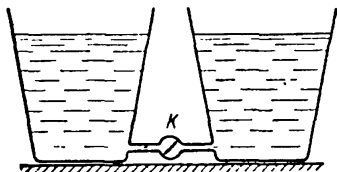


Рис. 46.

89. В одинаковых сообщающихся сосудах, показанных на рис. 46, находится вода. Кран K закрыли и воду в правом сосуде нагрели, вследствие чего ее уровень немного повысился. Будет ли вода переливаться из правого сосуда в левый, если открыть кран?

90. На поверхности пруда плавает куб. Равна ли сила, с которой вода его выталкивает, весу вытесненного объема воды?

91. Тело, имеющее форму полушара, помещено в стеклянный сосуд с ртутью и находится там в состоянии

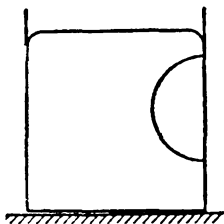


Рис. 47.

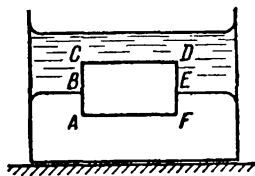


Рис. 48.

безразличного равновесия, занимая положение, показанное на рис. 47. Действует ли на него ртуть с силой, равной весу вытесненного объема ртути?

92. В сосуде с ртутью плавает медный брусок, над которым находится слой воды (рис. 48). Вычисляя дей-

ствующую на брусок выталкивающую силу, учащийся рассуждал следующим образом: «На нижнюю часть бруска действует выталкивающая сила, равная весу ртути в объеме $ABEF$. На верхнюю часть бруска действует выталкивающая сила, равная весу воды в объеме $BCDE$. Следовательно, сила, которая выталкивает брусок, равна весу ртути в объеме $ABEF$ плюс вес воды в объеме $BCDE$ ».

В чем ошибочность этого рассуждения?

93. Сосуд, изображенный на рис. 49, наполнен водой и опирается о ребро неподвижной призмы. В правую часть сосуда опустили кусок алюминия массой 0,5 кг, а в левую — кусок свинца массой 0,4 кг. Какая часть сосуда перевесит?

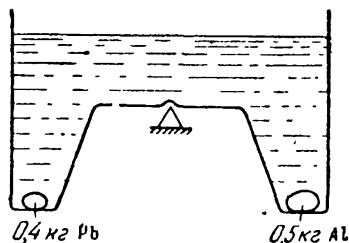


Рис. 49.

94. Если каплю масла поместить в анилиновый раствор, плотность которого равна плотности масла, то капля примет форму шара. В этом состоит известный опыт Плато, иллюстрирующий поверхностное натяжение жидкостей. Его часто

объясняют следующим образом: капля стремится принять форму шара, но этому препятствует сила тяжести, расплющивающая ее; если же капля находится в жидкости с такой же плотностью, как ее собственная, то сила тяжести уничтожается выталкивающей силой Архимеда и поэтому капля принимает форму шара.

В чем неправильность такого объяснения?

95. Аквалангист полностью погружен в воду и находится там в безразличном равновесии (т. е. сохраняет равновесие при любом положении тела). Можно ли сказать, что он находится в состоянии невесомости?

96. Полый шар погрузили в жидкость, лишенную вязкости, и удерживают в ней. В этом положении на него действует сила тяжести mg и выталкивающая сила F , большая чем mg . Затем шар отпускают, и он начинает подниматься с некоторым ускорением. Равно ли оно отношению $(F - mg)/m$?

97. Идеальная жидкость (т. е. несжимаемая жидкость, лишенная вязкости) обтекает шар (рис. 50). Пользуясь симметрией обтекающего потока, доказать,

что сила, с которой жидкость действует на шар, равна нулю.

98. Из тонкой проволоки изготовлена подковообразная рамка $ABCC'B'A'A$ (рис. 51). Если натянуть на нее

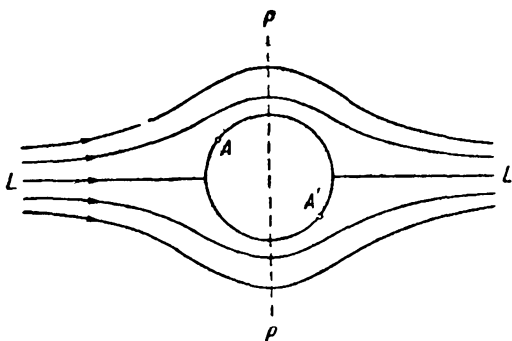


Рис 50.

мыльную пленку, то силы поверхностного натяжения, действующие на рамку на участках ABC и $A'B'C'$, будут горизонтальны и взаимно уничтожатся, а силы, действующие на рамку на участках AA' и CC' , будут направлены вверх. Значит, если сделать рамку очень легкой, то она «полетит». Указать ошибку в этом рассуждении.

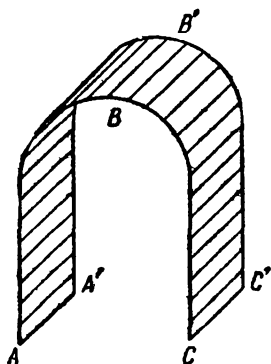


Рис. 51.

99. Обладает ли сжатый воздух потенциальной энергией?

100. Самолет совершает горизонтальный полет с постоянной скоростью. Так как он движется равномерно, то его скорость не может зависеть от его массы.

Кроме того, так как он движется в горизонтальном направлении, то его скорость не может зависеть от его веса. Почему же тяжело нагруженный самолет летит медленнее ненагруженного?

КИНЕМАТИКА

1. Лампа дневного света, в отличие от лампы накаливания, светит не непрерывно, а посредством вспышек, повторяющихся 100 раз в секунду (так как городской ток имеет частоту 50 Гц). За время между вспышками вентилятор поворачивается на

$$\frac{2000}{60 \cdot 100} = \frac{1}{3} \text{ оборота;}$$

так как он трехлопастный, то во время следующей вспышки его лопасти будут расположены точно так же, как во время предыдущей. Поэтому вентилятор будет казаться неподвижным.

2. Не обязательно. Пусть, например, точка движется по закону

$$x = t + 0,1 \sin 2\pi t,$$

где x — координата точки, измеряемая в метрах, а t — время, измеряемое в секундах. Путь, проходимый этой точкой за секунду, равен

$$\begin{aligned} \Delta x &= [t + 1 + 0,1 \sin 2\pi(t + 1)] - [t + 0,1 \sin 2\pi t] = \\ &= 1 + 0,1 [\sin(2\pi t + 2\pi) - \sin 2\pi t] = 1 \text{ м,} \end{aligned}$$

хотя это движение — неравномерное.

3. Может. Среднее ускорение определяется равенством

$$\bar{a} = \frac{v - v_0}{t},$$

из которого находим

$$t = \frac{v - v_0}{\bar{a}} = \frac{0,002 - 0,001}{100\,000} = 10^{-8} \text{ с.}$$

Значит, если точка пройдет путь 1 м за 10^{-8} с, то ее среднее ускорение будет равно 100 км/с^2 .

4. Из формулы $v^2 - v_0^2 = 2as$ следует, что

$$v_1^2 - v_0^2 = v_2^2 - v_1^2.$$

Подставив сюда $v_0 = 0$ и $v_1 = 10 \text{ м/с}$, найдем $v_2 = 14,1 \text{ м/с}$. Значит, искомое увеличение скорости

$$v_2 - v_1 = 14,1 - 10 = 4,1 \text{ м/с}.$$

5. Из формулы $v^2 - v_0^2 = 2as$ находим

$$a_1 = 0,05 \text{ м/с}^2, \quad a_2 = 0,0625 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, $a_2 > a_1$.

6. Не означает. Так как ускорение камня направлено все время вниз, то его знак все время одинаков. Если направление, идущее вниз, считать положительным, то ускорение камня будет иметь знак плюс, а если направление, идущее вниз, считать отрицательным, то ускорение камня будет иметь знак минус.

7. Рассмотрим первый случай (когда для подъема на высоту 29,4 м затрачивается 6 с). Вычисляя скорость камня через 6 с после начала движения, находим

$$v = v_0 - gt = 34,3 - 9,8 \cdot 6 = -24,5 \text{ м/с}.$$

Полученный отрицательный ответ показывает, что в рассматриваемый момент камень будет иметь скорость, направленную не вверх, а вниз. Отсюда следует, что если бросить камень вверх со скоростью $v_0 = 34,3 \text{ м/с}$, то он достигнет высоты $H = 29,4 \text{ м}$ не за 6 с, а раньше, и в момент $t = 6 \text{ с}$ будет на этой высоте вторично (опускаясь вниз). В этом можно убедиться также следующим путем. Найдем время, нужное для подъема на высоту 29,4 м при начальной скорости 34,3 м/с. Положив в формуле

$$H = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$H = 29,4 \text{ м}$, $v_0 = 34,3 \text{ м/с}$ и $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, получим

$$29,4 = 34,3 t - 4,9 t^2, \quad t^2 - 7 t + 6 = 0,$$

откуда

$$t_1 = 1 \text{ с}, \quad t_2 = 6 \text{ с}.$$

Таким образом, камень будет на данной высоте дважды: первый раз через 1 с (поднимаясь вверх) и второй — через 6 с (опускаясь вниз).

Аналогично обстоит дело и во втором случае. Здесь камень, брошенный вверх со скоростью 24,5 м/с, окажется на высоте 29,4 м в момент, определяемый равенством

$$29,4 = 24,5t - 4,9t^2,$$

откуда

$$t_1 = 2 \text{ с}, \quad t_2 = 3 \text{ с}.$$

Следовательно, он достигнет этой высоты не через 3 с, а через 2 с, и в момент $t = 3$ с будет на этой высоте вторично (опускаясь вниз).

Итак, оба рассмотренных случая относятся не к подъему, а к следующему за ним спуску. Но для того чтобы достигнуть таким путем высоты H за 3 с, нужна, очевидно, меньшая начальная скорость, чем для того, чтобы сделать это за 6 с.

Мы видим также, что достигнуть высоты 29,4 м за 6 с или за 3 с можно только опускаясь. Поднимаясь же, этого нельзя сделать ни при какой начальной скорости.

8. Из полученного противоречия следует, что рассматриваемое движение невозможно. Другими словами, если начальная скорость равна нулю, то, как бы ни двигалась точка, приобретенная ею скорость не может быть пропорциональна пройденному пути (не считая случая, когда точка все время покоится, т. е. когда v и s все время равны нулю (см. Примечание 1 на стр. 77)); хотя в этом случае $v = ks$, однако из соотношения $t > s/v$ не следует, что $t > 1/k$).

9. Со скоростью 0,5 м/с. Действительно, точка касания доски и катка все время находится точно над центром этого катка. Отсюда следует, что скорость ее перемещения равна скорости центра катка. Но последняя вдвое меньше скорости верхней точки катка, т. е. равна 0,5 м/с. (В месте касания доски и катка следует различать три точки: верхнюю точку катка, нижнюю точку доски и ту точку пространства, в которой каток касается доски. Две первых точки являются *физическими* и имеют скорость 1 м/с, а третья является *геометрической* и перемещается со скоростью 0,5 м/с.)

10. Точку касания дисков можно рассматривать как центр, вокруг которого вращается малый диск в данный

момент времени (так называемый *мгновенный центр вращения*). Поэтому угловая скорость малого диска равна

$$\omega = \frac{v_O}{OC} = \frac{v_O}{R}, \quad (1)$$

где v_O — скорость точки O (см. рис. 2). С другой стороны, угловая скорость точки O в ее движении вокруг центра большого диска равна

$$\omega' = \frac{v_O}{OO'} = \frac{v_O}{3R}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем $\omega = 3\omega'$. Значит, когда точка O сделает один оборот вокруг точки O' , диск совершит три оборота.

11. Рассуждая как при решении предыдущей задачи, получим

$$\omega = \frac{v_O}{OC} = \frac{v_O}{R}, \quad \omega' = \frac{v_O}{OO'} = \frac{v_O}{R},$$

т. е. $\omega = \omega'$. Значит, когда точка O совершит один оборот вокруг точки O' , малый диск сделает тоже один оборот.

12. Движение шара складывается из двух движений: из вращения вокруг оси EF с угловой скоростью ω и из вращения вокруг оси AB с угловой скоростью ω' (рис. 52). Поэтому скорость точки C можно представить в виде

$$v_C = \omega \cdot AO - \omega' \cdot OC.$$

Но так как $v_C = 0$, то

$$\omega \cdot AO - \omega' \cdot OC = 0,$$

откуда

$$\omega' = \omega \cdot \frac{AO}{OC}. \quad (1)$$

Вычислим теперь скорость точки D . Так как она участвует в двух указанных движениях, то

$$v_D = \omega a - \omega' b,$$

или с учетом (1)

$$v_D = \omega a - \omega \cdot \frac{AO}{OC} \cdot b = \omega b \left(\frac{a}{b} - \frac{AO}{OC} \right).$$

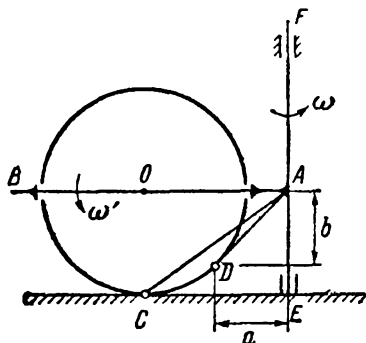


Рис. 52.

Но

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \angle DAE, \quad \frac{AO}{OC} = \frac{CE}{AE} = \operatorname{tg} \angle CAE,$$

и поэтому

$$v_D = \omega b (\operatorname{tg} \angle DAE - \operatorname{tg} \angle CAE). \quad (2)$$

Полученное равенство приводит к следующим заключениям:

1) если точка D лежит выше прямой AC , то

$$\operatorname{tg} \angle DAE > \operatorname{tg} \angle CAE$$

и $v_D > 0$, т. е. скорость точки D направлена так же, как скорость точки O ;

2) если точка D лежит ниже прямой AC (как на рис. 52), то

$$\operatorname{tg} \angle DAE < \operatorname{tg} \angle CAE$$

и $v_D < 0$, т. е. скорость точки D направлена противоположно скорости точки O ;

3) если точка D лежит на прямой AC , то

$$\operatorname{tg} \angle DAE = \operatorname{tg} \angle CAE$$

и $v_D = 0$.

13. Пусть в неподвижной системе xy точки A и B движутся по параллельным прямым с различными скоростями v_A и v_B (рис. 53).

Рассмотрим систему $x'y'$, поступательно движущуюся со скоростью u , перпендикулярной v_A и v_B . В этой системе точки A и B имеют скорости

$$v'_A = v_A + (-u),$$

$$v'_B = v_B + (-u).$$

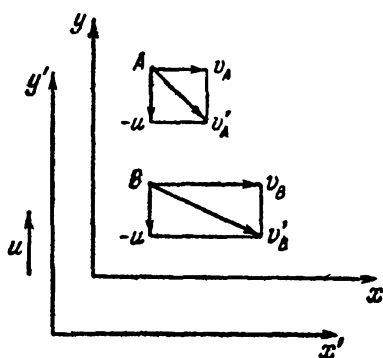


Рис. 53.

Так как векторы v'_A и v'_B не параллельны, то прямые, по которым движутся точки A и B в системе $x'y'$, будут пересекающимися.

14. Рассмотрим прямолинейно движущийся автомобиль. Обозначим через O центр его переднего колеса и через O' — центр заднего колеса. В неподвижной системе координат точка O будет двигаться по прямой, а

в системе координат, жестко связанной с задним колесом, — по окружности. (Центр этой окружности находится в точке O' , а радиус равен $O'O$.)

15. Может. Это будет в том случае, когда точки A и B движутся по двум концентрическим окружностям с одинаковой угловой скоростью.

16. Со скоростью 2 м/с. Пусть платформа вращается с угловой скоростью ω . Тогда для наблюдателя A , находящегося на этой платформе, все окружающее пространство будет вращаться вокруг оси O с угловой скоростью ω' , равной ω , но направленной в противоположную сторону. Поэтому наблюдатель B будет казаться наблюдателю A движущимся со скоростью

$$v' = \omega' \cdot OB = \omega(2 \cdot OA).$$

Но так как согласно условию

$$\omega \cdot OA = v = 1 \text{ м/с},$$

то $v' = 2v = 2 \text{ м/с}$.

17. Со скоростью 1 м/с. С точки зрения наблюдателя A_1 все окружающее пространство вращается вокруг точки O_1 против часовой стрелки. Поэтому для наблюдателя A_1 движение наблюдателя A_2 будет складываться из двух движений: из вращения вместе с окружающим пространством вокруг точки O_1 и из вращения вместе со второй платформой вокруг точки O_2 .

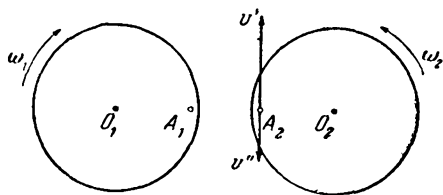


Рис. 54.

В первом из этих движений скорость наблюдателя A_2 равна

$$v' = \omega_1 \cdot O_1 A_2$$

и направлена так, как показано на рис. 54. Во втором же движении его скорость равна

$$v'' = \omega_2 \cdot O_2 A_2$$

и направлена в сторону, противоположную v' . Поэтому результирующая скорость наблюдателя A_2 относительно

наблюдателя A_1 равна

$$v' - v'' = \omega_1 \cdot O_1 A_2 - \omega_2 \cdot O_2 A_2 = 1.3 - 1.2 = 1 \text{ м/с.}$$

Очевидно, она направлена в сторону v' .

(В силу симметрии скорость наблюдателя A_1 относительно наблюдателя A_2 также будет равна 1 м/с и направлена в ту же сторону. Таким образом, каждый из наблюдателей будет считать, что другой отстаёт.)

18. Неправильно. Это видно хотя бы из того, что при очень малом угле α (если блоки расположены близко друг от друга), полученная формула приводит к ответу $u \approx 2v$, тогда как в этом случае, очевидно, должно быть $u \approx v$.

Скорость груза можно найти следующим путем.

Разложим скорость u на составляющие u_1 и u_2 (рис. 55). Так как нить CD не изменяет своей длины, то скорость u_1 должна быть равна скорости точки D . Таким образом, $u_1 = v$, и так как $u_1 = u \cos \alpha$, то

$$u \cos \alpha = v,$$

откуда

$$u = v / \cos \alpha.$$

19. Неверно, так как вектор v нельзя переносить из точки B в точку A . (Эта операция имеет физический смысл лишь в случае, когда скорости точек A и B направлены по одной прямой.) Правильное решение этой задачи можно получить так. Обозначим скорость точки A через u и разложим ее на составляющие u' и u'' , первая из которых направлена вдоль AB , а вторая — перпендикулярно AB (рис. 56). Так как

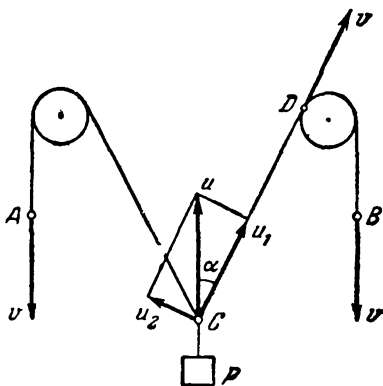


Рис. 55.

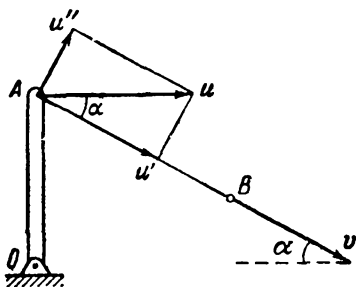


Рис. 56.

нить AB не изменяет своей длины, то $u' = v$, и поскольку $u' = u \cos \alpha$, то

$$u \cos \alpha = v,$$

откуда

$$u = v / \cos \alpha.$$

20. Первое верно, а второе — нет. В последнем легко убедиться, рассматривая ускорение точки O (см. рис. 9). Если считать, что окружность вращается вокруг точки C , то придем к выводу, что точка O имеет центростремительное ускорение v_O^2/R , направленное от O к C , что неверно.

Причина допущенной ошибки состоит в необоснованной замене окружности многоугольником. Хотя многоугольник с очень большим числом сторон почти не отличается от окружности, отсюда не следует, что он подобен окружности *во всех отношениях*. Рассмотрим пример более очевидный. Пусть точка M равномерно движется по некоторой окружности. Если взять очень маленькую дугу этой окружности, то ее можно считать прямолинейной. (Бесконечно малая дуга почти не отличается от своей хорды, и этим пользуются, например, при вычислении периметра круга.) Однако если исходить из такого представления при вычислении ускорения, то придем к выводу, что ускорение точки M равно нулю, что, конечно, неверно.

21. $a = 4,5 \text{ м/с}^2$. Пусть первое из названных ускорений равно a_1 , а второе равно a_2 . Тогда

$$a_1 = \omega_1^2 R, \quad a_2 = \omega_2^2 R,$$

где ω_1 — угловая скорость человека относительно платформы, а ω_2 — угловая скорость платформы. Абсолютное ускорение человека равно

$$a = (\omega_1 + \omega_2)^2 R,$$

что можно представить в виде

$$\begin{aligned} a &= \omega_1^2 R + \omega_2^2 R + 2\omega_1\omega_2 R = \\ &= \omega_1^2 R + \omega_2^2 R + 2\sqrt{(\omega_1^2 R)(\omega_2^2 R)} = a_1 + a_2 + 2\sqrt{a_1 a_2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a = 0,5 + 2 + 2\sqrt{0,5 \cdot 2} = 4,5 \text{ м/с}^2.$$

СТАТИКА

22. Вес одинаков. Пусть радиус дробы равен R , объем ящика равен V и объем, занятый дробью, равен V' . При заданном значении R объем V' , очевидно, пропорционален объему V . Следовательно,

$$V' = kV,$$

где k — коэффициент, который может зависеть только от R . С другой стороны, так как V и V' имеют одинаковые размерности, то коэффициент k — величина безразмерная и поэтому не может зависеть от размерной величины R . Следовательно, он есть некоторая абсолютная константа, из чего заключаем, что объем V' не зависит от радиуса R . Значит, и вес рассматриваемой дробы не зависит от ее радиуса.

23. Изменится. Это особенно ясно в случае, когда силы F_1 и F_2 приложены вблизи опор A и B . Тогда доска почти не будет прогибаться под действием сил F_1 и F_2 , но будет иметь заметный прогиб под действием силы R . Вообще, равнодействующая двух сил, приложенных к разным точкам *деформируемого* тела, не эквивалентна этим силам. (Строго говоря, само понятие равнодействующей имеет смысл лишь для сил, приложенных к *твердому* телу или к *одной* точке деформируемого тела.)

24. Силу P можно разложить на составляющие F_1 и F_2 , но ни откуда не следует, что реакция правой нити будет равна по величине силе F_1 . (В действительности она будет меньше силы F_1 .)

25. Будем для простоты считать, что у паровоза лишь одно ведущее колесо. Пусть сила, с которой пар давит на поршень цилиндра, равна F (рис. 57). Тогда, если пренебречь небольшим наклоном шатуна, сила, с которой он действует на колесо, также будет равна F . Но

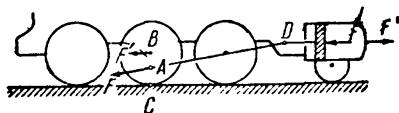


Рис 57.

колесо можно рассматривать как рычаг, точкой опоры которого является точка C . Поэтому в точке B к паровозу приложена сила F' , меньшая чем F (ибо $BC > AC$). С другой стороны, пар давит не только на поршень, но и на переднюю стенку цилиндра, действуя на нее с силой

$F'' = F$. Следовательно, на паровоз действует сила $F' < F$, направленная влево, и сила $F'' = F$, направленная вправо. Поэтому паровоз станет двигаться вперед.

26. Неверно, так как силы, растягивающие тросы, определяются случайностями монтажа балки. Например, если при подвеске балки крайние тросы были не натянуты. Возможны и другие случаи: когда натянуты только крайние тросы или когда одни тросы натянуты сильно, а другие — слабо.

27. Сдвинется. Найдем силу трения в точке B , когда тележка движется. В этом случае на стержень AB действуют сила тяжести P , реакция R и сила трения F (рис. 58). Так как стержень остается в покое, то сумма моментов этих сил относительно точки A равна нулю:

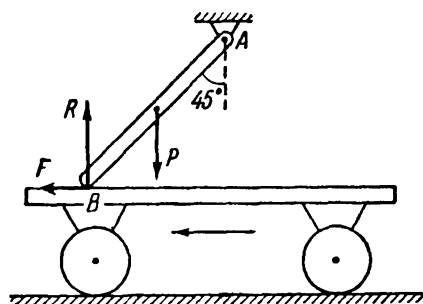


Рис. 58.

$$\begin{aligned} P \cdot \frac{AB}{2} \sin 45^\circ - \\ - R \cdot AB \sin 45^\circ - \\ - F \cdot AB \cos 45^\circ = 0. \end{aligned}$$

Подставив сюда $F = 0,3 R$ и решив полученное равенство относительно R , найдем

$$R = \frac{P}{2} \cdot \frac{1}{1,3}.$$

Но так как сила N , о которой говорится в условии, очевидно, равна $P/2$, то последнее равенство можно записать в виде

$$R = \frac{N}{1,3}.$$

Следовательно, сила трения стержня о движущуюся тележку равна

$$F = 0,3 R = 0,3 \frac{N}{1,3} = 0,231 N.$$

Так как она меньше $0,25 N$, то сила, равная $0,25 N$, достаточна, чтобы сдвинуть тележку.

28. Сумма моментов сил F , N и T равна (см. рис. 16)

$$M_A = F \cdot AE - N \cdot BC + T \cdot AB.$$

Подставив сюда $AE = 20$ см, $BC = 5$ см, $AB = 10$ см, получим

$$M_A = 20F - 5N + 10T.$$

Далее, если шкив *вращается*, то $T = kN = 0,6N$ и поэтому

$$M_A = 20F - 5N + 10 \cdot 0,6N = 20F + N.$$

Отсюда видно, что M_A не обращается в нуль ни при каком положительном значении N . Таким образом, предположение, что шкив *вращается*, приводит к противоречию. Следовательно, как бы ни были велики силы, приводящие шкив в движение, он *вращаться не будет* (произойдет заклинивание шкива).

29. Когда стержень начнет двигаться, на него будут действовать силы, показанные на рис. 59 (P — сила тяжести, R_1 — реакция стены, R_2 — реакция пола). Составив уравнение моментов относительно точки A , получим

$$P \cdot \frac{AB}{2} \cos 60^\circ - R_1 \cdot AB \sin 60^\circ = 0,$$

откуда

$$R_1 = \frac{P}{2} \operatorname{ctg} 60^\circ.$$

Составив затем уравнение проекций на горизонтальную ось, будем иметь

$$F + R_1 - F_{\text{тр}} = 0, \quad F_{\text{тр}} = F + R_1,$$

что с учетом выражения для R_1 дает

$$F_{\text{тр}} = F + \frac{P}{2} \operatorname{ctg} 60^\circ.$$

Подставив числовые данные, находим

$$F_{\text{тр}} = 20 + \frac{50}{2} \operatorname{ctg} 60^\circ \approx 34 \text{ Н.}$$

Таким образом, $F_{\text{тр}} > F$. (Это можно было предвидеть. Из рис. 59 видно, что реакция R_1 «помогает» силе F преодолевать силу $F_{\text{тр}}$. Следовательно, $F < F_{\text{тр}}$.)

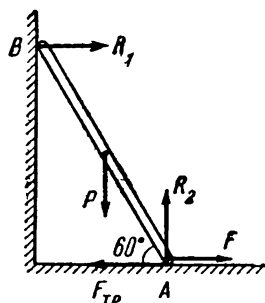


Рис. 59.

30. На 15 Н.

1-е решение. Пусть к точкам A и B приложены неравные силы P и Q , удерживающие нить в равновесии. Ясно, что если увеличить (или уменьшить) их в одно и то же число раз, то во столько же раз увеличатся (или уменьшатся) силы трения и нить будет оставаться в равновесии. Если же силы P и Q были такими, что приводили нить в движение, то они будут двигать ее и в случае увеличения (или уменьшения) этих сил в одинаковое число раз. Отсюда следует, что вопрос о равновесии нити определяется только отношением P/Q . Следовательно, точка A станет опускаться, если

$$\frac{P}{Q} \geq n, \quad (1)$$

где n — число, зависящее от коэффициента трения μ , возможно, от радиуса цилиндра.

Пользуясь неравенством (1), легко решить эту задачу. Так как точка A стала опускаться при $P = 80$ Н, $Q = 60$ Н, то

$$n = \frac{80}{60} = \frac{4}{3}.$$

Значит, для того чтобы точка A стала подниматься, должно выполняться неравенство

$$\frac{Q}{P} \geq \frac{4}{3},$$

которое при $Q = 60$ Н дает

$$P \leq 45 \text{ Н.}$$

Следовательно, чтобы точка A стала подниматься, надо уменьшить силу P на

$$60 - 45 = 15 \text{ Н.}$$

2-е решение. Пусть сила Q задана и нужно найти то минимальное значение силы P , при котором точка A начинает опускаться. Очевидно,

$$P_{\min} = f(Q, k, R), \quad (2)$$

где k — коэффициент трения, а R — радиус цилиндра. Далее, так как число k безразмерно, а величины Q и R имеют существенно различные размерности, то правая часть равенства (2) будет иметь размерность силы,

только если

$$f(Q, k, R) = Q \varphi(k),$$

где $\varphi(k)$ — некоторая функция безразмерного аргумента k . Таким образом,

$$P_{\text{min}} = Q \varphi(k),$$

откуда

$$\frac{P_{\text{min}}}{Q} = \varphi(k).$$

Значит, чтобы точка A опускалась, сила P должна удовлетворять неравенству

$$\frac{P}{Q} \geq \varphi(k). \quad (3)$$

Обозначив правую часть этого неравенства через n , получим соотношение (1) и дальше можем повторить рассуждения, изложенные в 1-м решении.

(Эйлер доказал, что правая часть неравенства (3) имеет вид

$$\varphi(k) = e^{k\pi}, \quad (4)$$

где e — основание натуральных логарифмов ($e \approx 2,718$). Мы не выводим соотношения (4), так как это трудно сделать элементарным путем.)

31. Пусть грузы помещены в вершины четырехугольника $ABCD$ (рис. 60). Центр тяжести системы (A, B) находится в точке M , являющейся серединой отрезка AB , а центр тяжести системы (C, D) — в точке N , являющейся серединой отрезка CD . Так как системы (A, B) и (C, D) имеют

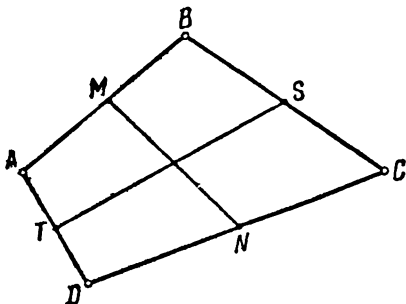


Рис. 60.

одинаковый вес (равный $2P$), то центр тяжести системы (A, B, C, D) находится в середине отрезка MN .

С другой стороны, центр тяжести системы (B, C) находится в точке S , являющейся серединой отрезка BC , а центр тяжести системы (A, D) — в точке T , являющейся серединой отрезка AD . Следовательно, центр тяжести системы (A, B, C, D) лежит в середине отрезка ST . Но у системы (A, B, C, D) имеется только один

центр тяжести. Значит, середины отрезков MN и ST совпадают.

(Приведенное доказательство, очевидно, справедливо и когда точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости. Это позволяет сформулировать теорему: отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.)

32. Газ действует на сосуд с силами F_1, F_2, F_3 , стремящимися вращать этот сосуд вокруг оси A (рис. 61):

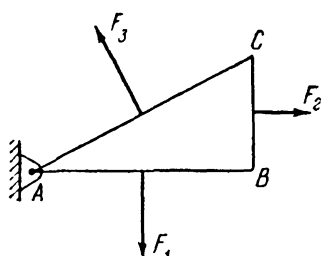


Рис 61.

Так как плечи этих сил равны $AB/2, BC/2$ и $AC/2$, то, составив уравнение моментов, будем иметь

$$F_1 \cdot \frac{AB}{2} + F_2 \cdot \frac{BC}{2} = F_3 \cdot \frac{AC}{2}.$$

Но

$$F_1 = p(AB \cdot h), \quad F_2 = p(BC \cdot h),$$

$$F_3 = p(AC \cdot h),$$

где p — давление газа, а h — высота сосуда (на рисунке не показана). Поэтому уравнение моментов принимает вид

$$p(AB \cdot h) \frac{AB}{2} + p(BC \cdot h) \frac{BC}{2} = p(AC \cdot h) \frac{AC}{2};$$

сократив на $ph/2$, получим

$$AB^2 + BC^2 = AC^2.$$

ДИНАМИКА

33. Неверно. Сила порождает только ускорение той частицы, к которой она приложена. Что касается деформаций, то они возникают вследствие перемещения частиц деформируемого тела и поэтому являются не прямым результатом действия сил, а косвенным. Например, если к концам стержня приложить две растягивающие силы, то частицы стержня приобретут ускорения и станут удаляться друг от друга, т. е. стержень начнет деформироваться. При этом в стержне возникнут упругие силы, препятствующие его растяжению, и дальнейшая деформация стержня прекратится. Заметим, что

в некоторых случаях силы вообще не вызывают деформации. Простейшим примером может служить свободно падающее тело: оно не деформируется под действием сил тяжести.

34. Во-первых, третий закон Ньютона верен не только для тел, взаимодействующих посредством контакта, но и для тел, взаимодействующих на расстоянии (например, посредством сил тяготения). А во-вторых, приведенное доказательство содержит порочный круг, ибо неявно использует третий закон Ньютона. Действительно, второй закон Ньютона относится к материальной точке, а в приведенном доказательстве он применяется к системе тел (1, 2). И хотя равенство

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

верно, однако оно выражает не второй закон Ньютона, а теорему о движении центра масс, согласно которой

$$\sum F = (\sum m) a_c, \quad (2)$$

где $\sum F$ — сумма всех действующих на систему внешних сил, $\sum m$ — суммарная масса системы, a_c — ускорение центра масс системы. Но при выводе этого равенства существенно используется тот факт, что силы действия равны силам противодействия (именно поэтому в левой части равенства (2) стоит не сумма *всех* сил, а лишь сумма *внешних* сил). Следовательно, равенство (1) предполагает верным тот закон, который мы с его помощью пытались доказать.

35. Нельзя, так как силы трения колес о тормозные колодки являются внутренними и поэтому не могут уменьшить скорость автомобиля. Автомобиль уменьшает свою скорость только под действием сил трения о землю, а трение о тормозные колодки оказывает не прямое влияние, а косвенное: когда вращение колес замедляется, они проявляют тенденцию к скольжению (так как автомобиль имеет тенденцию двигаться вперед с прежней скоростью). Поэтому между колесами и землей возникают значительные силы трения, которые и приводят к уменьшению скорости автомобиля.

36. Неверен, так как если $k = 6/g$, то

$$a = -kg = -6 \text{ м/с}^2$$

и через 2 с трамвай будет иметь скорости

$$v = v_0 + at = 10 - 6 \cdot 2 = -2 \text{ м/с},$$

т. е. будет двигаться в противоположном направлении. Значит, удовлетворить поставленному в задаче требованию нельзя ни при каком значении k .

(Можно рассуждать иначе. Путь, пройденный трамваем за время t , равен

$$s = \frac{v_0 + v}{2} t,$$

где v — его конечная скорость. Но если трамвай движется все время вперед, то $v > 0$ и, следовательно, $s > (v_0/2)t$. Подставив сюда $v_0 = 10 \text{ м/с}$ и $t = 2 \text{ с}$, получим $s > 10 \text{ м}$. Значит, двигаясь равномерно-замедленно вперед, трамвай не может пройти за 2 с путь 8 м.)

37. Если бы в этой системе не было никаких потерь энергии (например, на трение и сопротивление воздуха), то брусок 1 действительно оставался бы в покое. Фактически же он будет совершать небольшие колебания, но если силы трения будут очень малы, то эти колебания будут иметь ничтожную амплитуду. Что касается бруска 2, то, хотя его колебания поддерживаются колебаниями бруска 1, амплитуда колебаний второго бруска будет не малой. Это объясняется следующим.

Перепишав условие

$$c = m_2 \omega^2$$

в виде равенства

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m_2}},$$

видим, что его правая часть равна частоте свободных колебаний бруска 2 (в случае, когда брусок 1 неподвижен). А так как в левой части этого равенства стоит частота силы F , поддерживающей колебания системы, то написанное условие есть условие совпадения частоты возбуждающей силы с частотой свободных колебаний бруска 2. Иначе говоря, это — условие резонанса. Но при резонансе даже ничтожные колебания бруска 1 достаточны для поддержания заметных колебаний бруска 2.

Устройства, подобные показанному на рис. 21, называются *динамическими демпферами* и иногда применяются для уничтожения нежелательных вибраций,

(Если нужно уничтожить колебания бруска 1 под действием силы F , то достаточно присоединить к нему брусок 2 на подходящей пружине. Тогда второй брусок будет колебаться, а первый будет почти неподвижен.)

На рис. 62 показан динамический демпфер, в котором роль пружины играет сила тяжести. Если $F = F_0 \sin \omega t$ и $\omega = \sqrt{g/AB}$, то стержень AB будет колебаться, а стержень OA будет практически неподвижен.

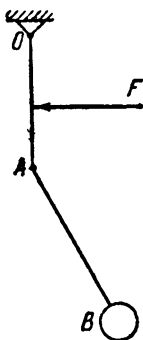


Рис. 62.

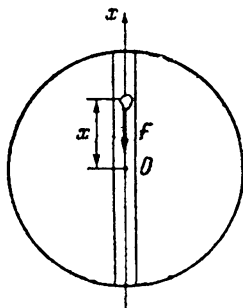


Рис. 63.

38. Представим себе, что колодец доходит до Южного полюса (рис. 63), и вычислим время движения камня до центра Земли. На камень действует сила тяжести, направленная к центру O и изменяющаяся по закону

$$F = -kx$$

(знак минус показывает, что когда координата x положительна, сила F отрицательна, и наоборот). Коэффициент пропорциональности k легко найти, полагая $x = R$. Так как в этом случае $F = -mg$, то

$$-kR = -mg,$$

откуда

$$k = \frac{mg}{R}$$

и, следовательно,

$$F = -\frac{mg}{R} x.$$

Полученное равенство показывает, что камень будет совершать в колодце гармонические колебания. Так как

их период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/R}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

то время движения до центра равно

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Поскольку период T не зависит от начального положения камня, то время движения из точек A и B одинаково.

(Если подставить в последнее равенство числовые значения R и g , то получим $t \approx 21$ мин.)

39. Пусть вагон K движется по тоннелю AB от точки A к точке B (рис. 64). Примем прямую BA за ось x , и

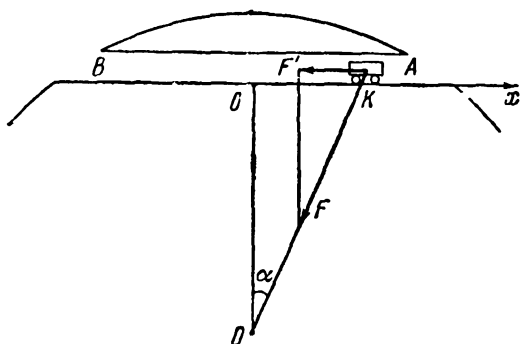


Рис. 64.

выберем начало отсчета в точке O' (середина тоннеля). На вагон действует сила $F = (mg/R) OK$, где OK — расстояние от вагона до центра Земли (см. решение предыдущей задачи). Проектируя ее на ось x , будем иметь

$$F' = F \sin \alpha = \frac{mg}{R} OK \sin \alpha = \frac{mg}{R} O'K = \frac{mg}{R} x,$$

где $x = O'K$ — координата вагона. Учитывая, что знак силы F' противоположен знаку координаты x , получаем

$$F' = -\frac{mg}{R} x.$$

Полученное равенство показывает, что вагон будет совершать в тоннеле гармонические колебания. Так как

их период

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{mg/R}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

то время движения от A до B равно

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \pi \sqrt{\frac{6370 \cdot 10^3}{9,8}} = 2530 \text{ с} \approx 42 \text{ мин.}$$

Поскольку период T не зависит от длины AB , то на движение от Москвы до Ленинграда уйдет столько же времени, сколько на движение от Москвы до Владивостока.

40. Первое. То, что шарик не движется в направлении OA , означает, что он не имеет в этом направлении скорости. Но сила пропорциональна не скорости, а ускорению. Последнее же направлено по радиусу и, следовательно, имеет составляющую в направлении OA .

41. Согласно равенствам (1) и (2) на стр. 16 упругая сила пружины равна

$$100x - 10$$

и центростремительная сила равна

$$10 + 200x.$$

Но при любом положительном x справедливо неравенство

$$100x - 10 < 10 + 200x.$$

Следовательно, как бы ни растягивалась пружина, развиваемая ею упругая сила будет меньше центростремительной силы, нужной для вращения шарика. Поэтому шарик должен был бы неограниченно удаляться от центра, а пружина — неограниченно растягиваться. Практически этого, конечно, не будет, и через некоторое время процесс растяжения пружины закончится. Это произойдет тогда, когда в результате значительного удлинения пружины ее жесткость станет существенно больше первоначальной. Тогда ее упругая сила станет больше определяемой равенством (1) и им нельзя будет пользоваться.

42. Уравнение

$$m\omega^2 l \sin \alpha \cos \alpha = mg \sin \alpha$$

распадается на два: на уравнение

$$\omega^2 l \cos \alpha = g$$

и уравнение

$$\sin \alpha = 0.$$

Первое из них имеет решение, определяемое равенством

$$\cos \alpha = \frac{g}{\omega^2 l}, \quad (1)$$

а решением второго является

$$\alpha = 0. \quad (2)$$

Поскольку в данном случае

$$\frac{g}{\omega^2 l} > 1, \quad (3)$$

то остается лишь решение (2), т. е. стержень вообще не будет отклоняться от вертикали. Так будет при любой скорости ω , удовлетворяющей неравенству (3), т. е. при

$$\omega < \sqrt{\frac{g}{l}},$$

Если же

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{l}},$$

то будут иметь смысл оба указанных решения, однако можно доказать (см. Примечание 2 на стр. 77), что положение $\alpha = 0$ является неустойчивым и поэтому стержень фактически отклонится на угол, определяемый равенством (1).

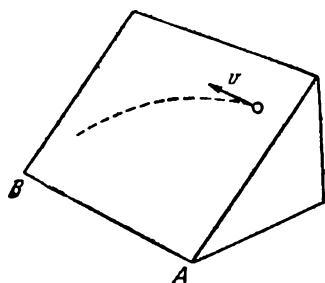


Рис. 65.

43. Как только монета получит указанную скорость, сила трения станет направленной противоположно вектору v . Так как эта сила горизонтальна, то она не сможет препятствовать движению монеты вниз по наклон-

ной плоскости. В результате, монета станет двигаться по кривой, изображенной на рис. 65.

44. Скорость v можно разложить на составляющие v_1 и v_2 , а силу F — на составляющие F_1 и F_2 . Но из того, что $F = kv^2$, вовсе не следует, что $F_1 = kv_1^2$ и $F_2 = kv_2^2$.

Действительно, из рис. 28 видно, что

$$F_1 = F \cos 60^\circ,$$

и так как $F = kv^2$, то

$$F_1 = kv^2 \cos 60^\circ.$$

С другой стороны, $v_1 = v \cos 60^\circ$ и, следовательно,

$$kv_1^2 = kv^2 \cos^2 60^\circ.$$

Сравнивая два последних равенства, убеждаемся в том, что $F_1 \neq kv_1^2$. Аналогично $F_2 \neq kv_2^2$.

45. Брусok будет оставаться на месте.

46. $s = 70$ см. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = kmgs, \quad s = \frac{v^2}{2kg}.$$

Следовательно,

$$s_1 = \frac{v_1^2}{2kg}, \quad s_2 = \frac{v_2^2}{2kg}, \quad s = \frac{v^2}{2kg} = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2kg}.$$

Из трех последних равенств получаем

$$s = s_1 + s_2 = 30 + 40 = 70 \text{ см.}$$

47. Когда колеса автомобиля находятся на грани скольжения, но не проскальзывают, сила трения равна kP , где k — коэффициент трения, а P — вес автомобиля. Это — максимальная сила трения покоя. Если же автомобиль будет идти юзом, то на колеса будет действовать сила трения скольжения. Но известно, что трение скольжения несколько меньше максимального трения покоя (если скорость не чересчур велика). Следовательно, автомобиль, движущийся юзом, остановится позже.

48. На гимнастов действуют силы

$$F_1 = N_1 - P, \quad F_2 = N_2 - P,$$

где P — силы тяжести, а N_1 и N_2 — силы, действующие на гимнастов со стороны каната. Но так как силы N_1 , N_2 одинаковы и направлены в одну сторону (вверх), то силы F_1 , F_2 тоже имеют одинаковую величину и одинаковое направление. Следовательно, гимнасты будут двигаться относительно земли одинаковым образом и достигнут блока одновременно.

49. Гимнасты достигнут блока одновременно.

50. Так как колеса тепловоза не скользят по рельсам, то

$$F_1 \leq kP_1,$$

где P_1 — вес тепловоза, F_1 — сила трения между его колесами и рельсами, k — коэффициент трения стали о сталь.

Поскольку колеса вагонов тоже не скользят по рельсам, то

$$F_2 \leq kP_2,$$

где P_2 — вес вагонов, а F_2 — сила трения вагонных колес о рельсы.

Из написанных неравенств и из того, что $P_2 > P_1$, очевидно, нельзя сделать вывода, что $F_2 > F_1$.

(Трение между колесами вагонов и рельсами порождается двумя причинами: трением в подшипниках вагонных колес и трением, возникающим при качении колес по рельсам. Первая из этих причин создает трение покоя, а вторая — трение качения, но так как последнее очень мало, то им можно пренебречь.)

51. Трение диска о плоскость является трением качения и поэтому не может быть сведено к горизонтальной силе F , как было бы в случае трения скольжения. При качении диска он слегка вдавливается в плоскость, вследствие чего на него действует сила R , направленная примерно так, как показано на рис. 66. Поскольку

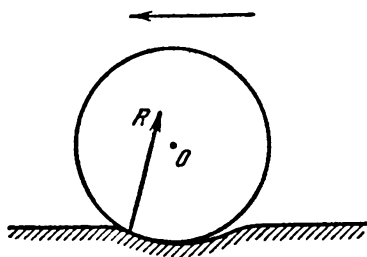


Рис. 66.

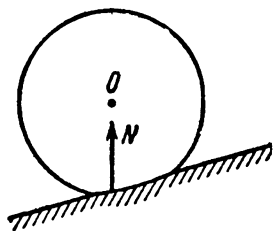


Рис. 67.

горизонтальная составляющая этой силы направлена вправо, скорость диска будет уменьшаться. Вместе с тем момент этой силы относительно точки O направлен по часовой стрелке и, следовательно, тормозит вращение диска.

52. Контакт между колесом и плоскостью будет осуществляться не в точке, а по некоторой площадке (вследствие деформации). Поэтому плоскость будет действовать на колесо со многими силами, равнодействующая которых показана на рис. 67.

53. Разложим искомую силу на вертикальную составляющую N и горизонтальную составляющую F . Сила N определяется равенством $4N = P$, где P — вес автомобиля. Следовательно,

$$N = \frac{P}{4}.$$

Далее, дорога действует на автомобиль с силой $4F$ и никакие другие горизонтальные силы на автомобиль не действуют (сопротивлением воздуха мы пренебрегаем). Поэтому

$$4F = \frac{P}{g} a,$$

где a — ускорение автомобиля. Но так как автомобиль движется равномерно, то $a = 0$ и, следовательно,

$$F = 0.$$

(Силу $4F$, приложенную к колесам, можно рассматривать как «тягу» автомобиля. Следовательно, тяга этого автомобиля равна нулю.)

54. Из полученного противоречия следует, что линия действия силы N проходит впереди центра колеса, т. е. так, как показано на рис. 68 (колесо соприкасается

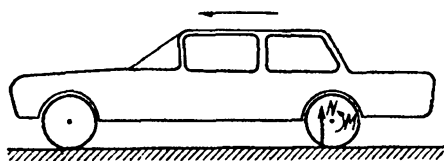


Рис. 68.

с землей по некоторой площадке). Момент этой силы относительно центра колеса направлен по часовой стрелке и уравнивает момент M , приложенный к колесу со стороны двигателя.

55. Дойдя до точки O , она круто обогнет ее и станет двигаться назад к точке M_0 . Действительно, согласно первому закону Кеплера траекторией точки M будет

некоторый эллипс с фокусом в точке O . (Так как начальная скорость точки почти равна нулю, то она не может удалиться от точки O на расстояние, большее первоначального расстояния OM_0 . Следовательно, точка M не может двигаться по параболе или гиперболе.) Но так как этот эллипс очень сильно сплюснут, то его вершины почти совпадают с его фокусами и, следовательно, левая вершина находится очень близко от точки O .

(В этом решении не учитываются релятивистские эффекты, вызванные тем, что когда точка M приближается к точке O , ее скорость сильно возрастает и приближается к скорости света.)

56. Один будет опускаться, а другой — подниматься.

Пусть T — натяжение нити, на которой висят крайние грузы. Тогда натяжение нити, несущей средний груз, будет равно $2T$. Считая, что крайние грузы опускаются, а средний поднимается, получим уравнения

$$m_1 g - T = m_1 a_1,$$

$$m_2 g - T = m_2 a_2,$$

$$2T - mg = m \frac{a_1 + a_2}{2},$$

где m_1 — масса правого груза, m_2 — масса левого груза, m — масса среднего груза, a_1 — ускорение правого груза, a_2 — ускорение левого груза. Подставив сюда $m_1 = 1,03$ кг, $m_2 = 1,1$ кг, $m = 2$ кг, будем иметь

$$\begin{aligned} 1,03 g - T &= 1,03 a_1, & 1,1 g - T &= 1,1 a_2, \\ 2T - 2g &= a_1 + a_2. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения, найдем

$$a_1 \approx -0,0009 g, \quad a_2 \approx 0,063 g.$$

Так как $a_1 < 0$, то правый груз будет не опускаться, а подниматься.

57. Лодка достигнет берега за одно и то же время.

Рассмотрим каждый из указанных случаев, пренебрегая сопротивлением воды.

1) *Вал зажат*. Тогда

$$a = \frac{F}{M}. \quad (1)$$

где a — ускорение лодки, а M — ее масса (включая массу вала и каната).

2) *Вал может вращаться.* Рассмотрим систему, состоящую из лодки, вала и каната. Так как в горизонтальном направлении на нее действует лишь одна внешняя сила F , то

$$F = Ma_c, \quad (2)$$

где M — масса этой системы, a_c — ускорение ее центра тяжести. Но если пренебречь массой выбираемого каната, то центр тяжести этой системы будет сохранять свое положение относительно лодки (так как вращение вала не изменяет положения его центра тяжести). Поэтому $a_c = a$, где a — ускорение лодки. Учитывая это, будем на основании (2) иметь

$$a = \frac{F}{M}. \quad (3)$$

Сравнивая равенства (1) и (3), видим, что ускорение лодки будет одним и тем же как в случае зажатого вала, так и в случае вала, способного вращаться.

(Последнее заключение верно и тогда, когда на лодку действует сопротивление воды. Мы не рассматривали этот случай, так как он сложнее в математическом отношении.)

58. Силы F_1 и F_2 образуют пару, а пара сообщает телу вращение вокруг его центра масс; поэтому данное тело начнет вращаться вокруг точки C (см. рис. 36). Поскольку это вращение направлено по часовой стрелке, точка B станет двигаться вверх (т. е. в направлении, противоположном силе F_2).

59. Так как сила P не создает вращающего момента относительно центра масс C , то она не может привести стержень во вращение. Он приходит во вращение под действием реакции шарнира O .

60. Не будут. Для доказательства рассмотрим стержень AB в системе координат, связанной с вращающейся платформой (рис. 69). В этой системе координат стержень неподвижен, но находится в поле центробежной силы инерции. Следовательно, с точки зрения наблюдателя, находящегося на вращающейся платформе, на стержень действуют следующие силы: сила тяжести P , натяжение нити T и центробежные силы инерции, приложенные к каждому элементарному участку стержня.

Последние направлены так, как показано на рис. 69, и определяются равенством

$$\Delta F = \Delta m \cdot \omega^2 r, \quad (1)$$

где ΔF — центробежная сила инерции, действующая на один из участков, Δm — масса этого участка, r — расстояние этого участка от оси вращения, ω — угловая скорость платформы.

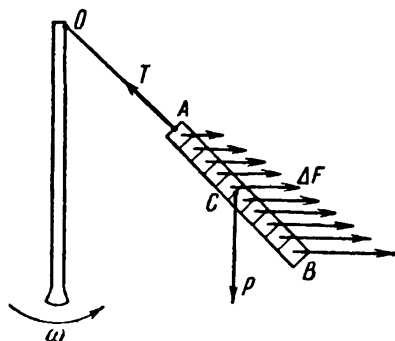


Рис. 69.

При этом, так как при перемещении от A к B расстояние r увеличивается, то силы ΔF будут увеличиваться по мере приближения к нижнему концу стержня. Теперь ясно, что точки O , A , B не могут лежать на одной прямой. Действительно, так как стержень находится в равновесии (во вра-

щающейся системе координат), то

$$M_C(P) + M_C(T) + M_C(\Delta F) = 0, \quad (2)$$

где $M_C(P)$, $M_C(T)$ и $M_C(\Delta F)$ — моменты сил P , T и ΔF относительно центра стержня C . Но так как

$$M_C(P) = 0 \quad \text{и} \quad M_C(\Delta F) \neq 0$$

(равнодействующая сил ΔF проходит ниже точки C), то $M_C(T) \neq 0$, что возможно, лишь если точки O , A , B не лежат на одной прямой.

О характере расположения стержня можно судить на основании равенства (2). Поскольку силы ΔF выглядят так, как показано на рис. 69, то момент $M_C(\Delta F)$ направлен против часовой стрелки. Значит, момент $M_C(T)$ направлен по часовой стрелке, т. е. линия действия силы T проходит левее точки C . Следовательно, стержень будет расположен примерно так, как показано на рис. 70.

61. Не прав. Он считает, что если на тело действуют силы, создающие вращающий момент в некоторой плоскости, то именно в этой плоскости они заставляют тело вращаться. Но это верно лишь в простейших случаях,

а в общем случае плоскость вращения тела может не совпадать с плоскостью вращающего момента. Рассмотрим, например, стержень AB , изображенный на рис. 71. Он соединен со стержнем KL посредством шарнира O и нити BC и при вращении вокруг вертикали отклонен на некоторый угол α . На стержень AB действуют: сила тяжести, реакция шарнира O и сила F со стороны нити, причем первые две не создают вращающего момента

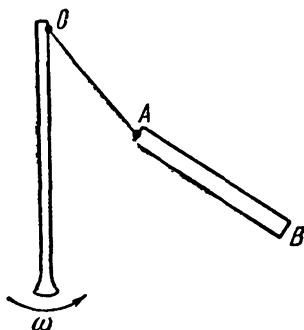


Рис. 70.

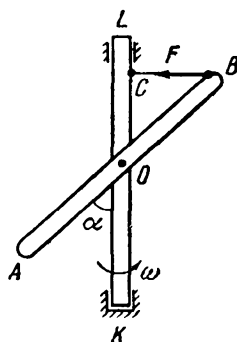


Рис. 71.

относительно центра O , а последняя создает момент, действующий в плоскости чертежа. Тем не менее стержень AB в этой плоскости не вращается.

62. Если бы на груз действовала только одна сила притяжения к Солнцу, то он двигался бы с ускорением

$$a_r = F_r : m_r = \gamma \frac{M m_r}{R_r^2} : m_r = \gamma \frac{M}{R_r^2}, \quad (1)$$

где γ — гравитационная постоянная, M — масса Солнца, m_r — масса груза, R_r — расстояние от груза до Солнца. В то же время земной шар движется с ускорением

$$a_3 = F_3 : m_3 = \gamma \frac{M m_3}{R_3^2} : m_3 = \gamma \frac{M}{R_3^2}, \quad (2)$$

где m_3 — масса Земли, R_3 — расстояние от Земли до Солнца. Но так как $R_r = R_3$, то

$$a_r = a_3,$$

т. е. Солнце сообщает одинаковое ускорение грузу и Земле. Отсюда следует, что притяжение к Солнцу не

влияет на движение груза относительно Земли и, в частности, не создает отклонения отвеса от вертикали.

(Рассуждая точно так же, приходим к выводу, что на положение отвеса не влияет и Луна или какое-нибудь другое небесное тело.)

63. Из решения предыдущей задачи следует, что Солнце сообщает одинаковое ускорение как Земле, так и всем телам, находящимся на ее поверхности, в частности океанским водам. Однако это заключение не вполне точно, ибо разные участки поверхности океанов находятся на различных расстояниях от Солнца и поэтому Земля и покрывающая ее вода получают под действием Солнца не вполне одинаковые ускорения. Это верно и в отношении притяжения к Луне: разные участки океанов получают под действием этого притяжения разные ускорения, не совпадающие с ускорением, которое сообщает Луна земному шару в целом (точнее, центру Земли). Таким образом, Земля и покрывающая ее вода движутся не вполне синхронно, что и приводит к возникновению приливов и отливов. (Расчет показывает, что приливное действие Луны почти втрое больше приливного действия Солнца. Поэтому можно считать, что морские приливы вызываются только действием Луны.)

64. Так как космонавт и шар участвуют во вращательном движении космического корабля, то в момент,

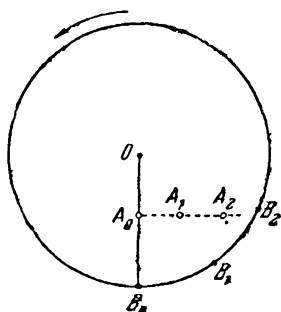


Рис 72.

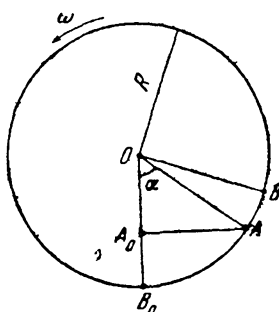


Рис. 73.

когда шар выпускается из рук, он имеет скорость, направленную перпендикулярно OA_0 (рис. 72). Поэтому в дальнейшем он станет двигаться прямолинейно, проходя через положения A_0, A_1, A_2, \dots . В то же время

точка B_0 будет двигаться по окружности, проходя через положения B_0, B_1, B_2, \dots . Поэтому шар будет приближаться к точке B_0 , т. е. будет «падать».

65. В точке, отстоящей на 1,07 м от точки B_0 . Так как шар будет двигаться перпендикулярно OA_0 (см. решение предыдущей задачи), то в некоторый момент времени он достигнет точки A (рис. 73). Точка же B_0 успеет к этому моменту переместиться в положение B . Вычислим расстояние AB .

Дуга B_0B равна

$$\widetilde{B_0B} = \omega R t,$$

где ω — угловая скорость корабля, а t — время, за которое шар проходит путь A_0A . Так как оно равно

$$t = \frac{A_0A}{v} = \frac{A_0A}{\omega \cdot OA_0},$$

то

$$\widetilde{B_0B} = \omega R \frac{A_0A}{\omega \cdot OA_0} = R \frac{A_0A}{OA_0} = R \operatorname{tg} \alpha. \quad (1)$$

Далее, так как

$$\widetilde{B_0A} = R\alpha, \quad (2)$$

то согласно (1) и (2)

$$\widetilde{AB} = \widetilde{B_0B} - \widetilde{B_0A} = R(\operatorname{tg} \alpha - \alpha), \quad (3)$$

где α определяется равенством

$$\cos \alpha = \frac{R - A_0B_0}{R}. \quad (4)$$

Подставив в (4) и (3) числовые данные, найдем

$$\cos \alpha = \frac{10 - 2}{10} = 0,8, \quad \alpha = 36^\circ 52' = 0,643,$$

$$\widetilde{AB} = 10(\operatorname{tg} 36^\circ 52' - 0,643) = 1,07 \text{ м.}$$

Полученный результат показывает, что падая «вниз» этот шар довольно сильно отклоняется влево. Поэтому его траектория будет выглядеть примерно так, как показано на рис. 74.

(Может возникнуть вопрос: если во вращающемся корабле на шар действует центробежная сила инерции,

направленная вдоль A_0B_0 (рис. 74), то как наблюдатель, находящийся в этом корабле, объяснит движение шара по траектории A_0A ? Дело в том, что во вращающейся системе координат имеется не только поле центробежной силы инерции, но и поле так называемой *силы инерции Кориолиса*. Последняя действует лишь на тела, имеющие некоторую скорость, пропорциональную величине этой скорости и направлена перпендикулярно вектору этой скорости (имеется в виду скорость относительно вращающейся системы координат). Так как скорость шара направлена примерно вдоль A_0B_0 , а сила инерции Кориолиса перпендикулярна скорости шара, то шар будет смещаться в поперечном направлении и упадет не в точке B_0 , а в точке A .)

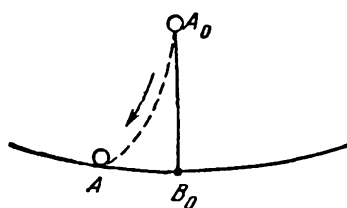


Рис. 74.

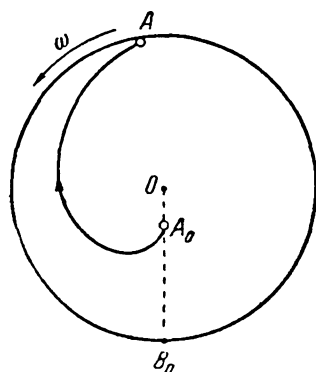


Рис. 75.

66. Согласно формулам (4) и (3), полученным при решении предыдущей задачи, будем иметь

$$\cos \alpha = \frac{10 - 7,8}{10} = 0,22,$$

$$\alpha = 77^\circ 18' = 1,35,$$

$$\widetilde{AB} =$$

$$= 10 (\operatorname{tg} 77^\circ 18' - 1,35) \approx 31 \text{ м.}$$

Следовательно, шар упадет не в точке B_0 (см. рис. 39), а на 31 м левее этой точки. Учитывая, что окружность с радиусом 10 м имеет длину около 63 м, приходим к выводу, что точка падения шара находится «на потолке». Траектория этого шара показана на рис. 75.

67. Рассмотрим движение шара в системе координат, участвующей только в поступательном движении корабля. Обозначим через v поступательную скорость шара относительно корабля и через v' — относительно рассматриваемой системы координат. Тогда, считая, что вектор v перпендикулярен A_0B_0 (см. рис. 39) и направлен

влево, получим

$$v' = v - \omega \cdot OA_0,$$

где ω — угловая скорость корабля. Пусть теперь $v = \omega \cdot OA_0$. Тогда $v' = 0$, т. е. шар не будет иметь начальной скорости в рассматриваемой системе координат. Значит, он будет в этой системе все время неподвижным, и поэтому наблюдателю, находящемуся во вращающемся корабле, будет казаться, что шар движется по окружности с центром в точке O .

68. Неверно, так как оно основано на формуле $F = \gamma Mm/r^2$, которая применима лишь в случае притяжения к шару, а Земля не является шаром. В ложности этого объяснения можно убедиться с помощью следующего простого примера. Вообразим, что Земля так сильно сплюснута у полюсов, что имеет форму диска. Тогда согласно формуле $F = \gamma Mm/r^2$ сила F будет на полюсе во много раз больше, чем на экваторе. Однако ясно, что на полюсе такой Земли сила F будет близка к нулю, а на экваторе будет иметь заметную величину.

69. С силой Mg . Рассмотрим систему, состоящую из часов и песчинок. Пока часы работают, количество движения этой системы не изменяется. А так как на нее действуют лишь две внешние силы: сила тяжести Mg и реакция стола N , то

$$Mg - N = 0,$$

откуда $N = Mg$. Значит, сила давления часов на стол тоже равна Mg .

(Когда часы начинают работать, количество движения этой системы увеличивается, а когда кончают, — уменьшается. Поэтому в начальный момент работы часы давят на стол с силой, меньшей Mg , а в конечный — с силой, большей Mg .)

70. С ускорением $0,4 \text{ м/с}^2$. Когда лифт неподвижен, система груз — вал приводится в движение силой

$$F = mg,$$

где m — масса груза. Если же лифт поднимается с ускорением ω , то с точки зрения наблюдателя, находящегося в лифте, система груз — вал приводится в движение силой

$$F' = mg + m\omega = m(g + \omega),$$

где mw — сила инерции груза. С другой стороны, ясно, что ускорение груза пропорционально силе F . Следовательно,

$$\frac{a'}{a} = \frac{F'}{F} = \frac{m(g+w)}{mg} = \frac{g+w}{g},$$

где a — ускорение груза в неподвижном лифте, а a' — в ускоренно поднимающемся. Но согласно условию $a = w = 2 \text{ м/с}^2$. Поэтому

$$a' = a \frac{g+w}{g} = 2 \frac{9,8+2}{9,8} \approx 2,4 \text{ м/с}^2.$$

Таково ускорение груза относительно лифта. Значит, относительно земли груз будет опускаться с ускорением

$$a' - w \approx 2,4 - 2 = 0,4 \text{ м/с}^2.$$

71. Да, но пассажир работы не совершает. Так как его руки давят на переднюю стенку с силой F , то его ноги действуют на пол с такой же горизонтальной силой F , но направленной назад. Поэтому его руки совершают положительную работу, а ноги — такую же отрицательную работу.

72. Примерно на 300 тыс. лет. Действительно, так как

$$\frac{I\omega^2}{2} = \frac{2}{5} mR^2 \cdot \frac{1}{2} \omega^2 = \frac{1}{5} mR^2 \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 = \frac{4}{5} \pi^2 mR^2 \cdot \frac{1}{T^2},$$

то искомая энергия равна

$$W = \frac{4}{5} \pi^2 mR^2 \left[\frac{1}{T^2} - \frac{1}{(T+\Delta T)^2} \right] = \frac{4}{5} \pi^2 mR^2 \frac{\Delta T (2T + \Delta T)}{T^2 (T + \Delta T)^2},$$

где $T = 24 \text{ ч}$ и $\Delta T = 1 \text{ с}$. Пренебрегая ΔT по сравнению с T , будем иметь

$$W = \frac{8}{5} \pi^2 mR^2 \frac{\Delta T}{T^3} = \frac{2}{5} m (2\pi R)^2 \frac{\Delta T}{T^3},$$

подставив $m = 6 \cdot 10^{24} \text{ кг}$, $2\pi R = 4 \cdot 10^7 \text{ м}$, $\Delta T = 1 \text{ с}$, $T = 86400 \text{ с}$, получим

$$W \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ Дж.}$$

Следовательно, искомое время равно

$$\frac{6 \cdot 10^{24}}{2 \cdot 10^{10}} = 300 \text{ тыс. лет.}$$

73. Пусть рыбаки тянут с силами F_1 и F_2 . Тогда

$$\frac{mv_1^2}{2} = F_1 s, \quad \frac{mv_2^2}{2} = F_2 s,$$

где m — масса лодки, s — ее расстояние от берега, v_1 — скорость, сообщаемая лодке первым рыбаком, v_2 — вторым. Кроме того, обозначив искомую скорость через v , будем иметь

$$\frac{mv^2}{2} = (F_1 + F_2)s.$$

Из этих трех равенств получаем

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{0,3^2 + 0,4^2} = 0,5 \text{ м/с.}$$

74. Работа, совершенная человеком, и кинетическая энергия, потерянная камнем, были израсходованы на движение поезда. (Человек и камень «помогли» локомотиву тянуть состав.)

75. Так как пуля увеличивает скорость платформы на ничтожную величину, то платформу можно считать инерциальной системой. Поэтому верно второе решение. Первое решение неверно, так как энергия пули расходуется не только на нагревание, но и на увеличение кинетической энергии платформы.

76. На увеличение кинетической энергии вращающегося космического корабля (см. Примечание 3 на стр. 78).

77. 1581 м/с. Гелий — газ одноатомный (см. Примечание 4 на стр. 78), поэтому его внутренняя энергия равна

$$W = n \frac{mv_1^2}{2} + n \frac{mv_2^2}{2}, \quad (1)$$

где n — число атомов в каждом сосуде, m — масса одного атома, v_1 и v_2 — средние скорости атомов в первом и втором сосудах. Так как открывая кран и давая газу перемешаться, мы не изменяем его внутренней энергии, то

$$W = 2n \frac{mv^2}{2}, \quad (2)$$

где v — средняя скорость атомов после смешения. Из равенств (1) и (2) получаем

$$v = \sqrt{\frac{v_1^2 + v_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1000^2 + 2000^2}{2}} = 1581 \text{ м/с.}$$

78. Мощность паровоза зависит от его скорости и увеличивается с ростом последней (так как при этом увеличивается число ходов, которые делает поршень в течение секунды). Если добавить второй паровоз, то увеличится как скорость поезда, так и мощность, развиваемая одним

паровозом. Поэтому мощность, затрачиваемая на движение этого поезда, возрастет *больше чем в два раза*.

79. Неверно, так как энергией $mv^2/2$ стержень обладал не после остановки вагона, а *перед* его остановкой. В процессе же остановки кинетическая энергия стержня уменьшалась, так как сила, с которой он давил в это время на шарнир O , совершала положительную работу.

Эту задачу можно решить так. Будем считать, что процесс остановки занимает некоторое, очень малое время τ , в течение которого вагон движется равномерно-замедленно. В системе отсчета, связанной с вагоном, на стержень будет действовать сила инерции

$$F_i = m |a| = m \frac{v}{\tau},$$

где a — ускорение вагона в процессе остановки. Эта сила направлена вперед, и так как она приложена в середине стержня, то создает вращающий момент

$$M_i = F_i \cdot \frac{l}{2} = \frac{mv}{\tau} \cdot \frac{l}{2}.$$

Под действием этого момента стержень приобретает угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{M}{I} = \frac{mv}{\tau} \cdot \frac{l}{2I},$$

где I — момент инерции стержня. Следовательно, к концу остановки стержень будет иметь угловую скорость

$$\omega = \varepsilon \tau = \frac{mv l}{2I}$$

и кинетическую энергию

$$T = \frac{I \omega^2}{2} = \frac{m^2 v^2 l^2}{8I}.$$

Теперь по закону сохранения энергии получим

$$\frac{m^2 v^2 l^2}{8I} = mgh,$$

$$\frac{m^2 v^2 l^2}{8I} = mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cos \alpha \right),$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{mv^2 l}{4lg}.$$

Учтя, что момент инерции стержня $I = ml^2/3$, найдем

$$\cos \alpha = 1 - \frac{3}{4} \frac{v^2}{gl}.$$

80. $v_{\infty} = 4,84$ км/с. Пусть начальная скорость ракеты равна v_0 , а ее скорость в бесконечности равна v_{∞} . Тогда

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_{\infty}^2}{2} = U_{\infty}, \quad (1)$$

где U_{∞} — потенциальная энергия ракеты в бесконечности. Последнюю легко найти следующим путем. Положим в равенстве (1) $v_0 = v_*$, где v_* — вторая космическая скорость. Так как в этом случае v_{∞} обращается в нуль, то получим

$$\frac{mv_*^2}{2} = U_{\infty}. \quad (2)$$

Таково значение энергии U_{∞} . Подставив теперь (2) в (1), будем иметь

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_{\infty}^2}{2} = \frac{mv_*^2}{2},$$

откуда

$$v_{\infty} = \sqrt{v_0^2 - v_*^2}.$$

Полученная формула позволяет вычислить v_{∞} , если известно v_0 . Подставив в нее $v_0 = 12,2$ км/с, найдем

$$v_{\infty} = \sqrt{12,2^2 - 11,2^2} = 4,84 \text{ км/с.}$$

81. Неверно, так как скорость снаряда относительно пушки была во втором случае отлична от 500 м/с.

Согласно закону сохранения количества движения

$$mv = Mu, \quad (1)$$

где m — масса снаряда, M — масса пушки, v — скорость снаряда (во втором случае), u — скорость отката пушки. Далее, согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = A, \quad (2)$$

где A — работа, совершаемая пороховыми газами. Но так как $A = mv_0^2/2$, где v_0 — скорость снаряда в первом случае, то

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}. \quad (3)$$

Подставив в равенства (1) и (3) заданные значения v и v_0 , будем иметь

$$499 m = Mu, \quad (500^2 - 499^2) m = Mu^2.$$

Таким образом, получилась система двух уравнений с двумя неизвестными (u и m/M). Решив ее, найдем

$$u = \frac{500^2 - 499^2}{499} = (500 - 499) \frac{500 + 499}{499} \approx 2 \text{ м/с.}$$

Из полученного ответа следует, что относительная скорость снаряда была во втором случае равна не 500 м/с, а 501 м/с.

82. Частично за счет работы тепловоза и частично за счет работы пассажира. Пусть поезд движется с постоянным ускорением a . Тогда на пассажира будет действовать сила инерции ma , где m — масса пассажира. Так как сила инерции направлена назад, ее придется преодолеть, и когда пассажир пройдет по вагону путь s , он совершит работу

$$A = mas. \quad (1)$$

Подсчитаем теперь, на сколько увеличится за это время кинетическая энергия пассажира. Имеем

$$\Delta T = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{m}{2} (v^2 - v_0^2), \quad (2)$$

где v_0 — скорость пассажира в начале рассматриваемого интервала времени, а v — в конце (имеются в виду скорости относительно земли). Но так как движение пассажира относительно земли — равномерно-ускоренное, то

$$v^2 - v_0^2 = 2a(s + S), \quad (3)$$

где a — ускорение пассажира (оно равно ускорению поезда) и $s + S$ — перемещение пассажира относительно земли (s — его перемещение относительно вагона, S — перемещение вагона). Подставив (3) в (2), получим

$$\Delta T = ma(s + S). \quad (4)$$

Сравнивая теперь (4) с (1), видим, что $\Delta T > A$, т. е. увеличение кинетической энергии пассажира больше работы, которую он совершил. Значит, кинетическая энергия пассажира увеличивается как за счет его работы, так и за счет работы тепловоза.

83. Если тела A и B взаимодействуют посредством контакта, то уменьшается. Если же они взаимодействуют посредством сил дальнего действия, то может не уменьшиться. Пусть, например, сила F , с которой тело A действует на тело B , есть сила тяготения. Тогда, если началь-

ные скорости этих тел равны нулю, сила F будет совершать положительную работу, а энергия тела A будет увеличиваться (так как оно будет приобретать скорость). В этом случае тела A и B будут увеличивать свою кинетическую энергию за счет уменьшения энергии гравитационного поля.

84. Пусть начальная скорость Земли равна нулю, а начальная скорость камня равна v_0 . Найдем скорость Земли в момент, когда камень достигнет максимальной высоты. Так как Земля и камень в этот момент имеют одну и ту же скорость v , то по закону сохранения количества движения

$$mv_0 = (M + m)v,$$

где m — масса камня, а M — масса Земли. Следовательно,

$$v = v_0 \frac{m}{M + m},$$

и так как m очень мало по сравнению с M , то можно принять

$$v = v_0 \frac{m}{M}.$$

Такова скорость, полученная Землей. Значит, приобретенная ею кинетическая энергия равна

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{1}{2} M \left(v_0 \frac{m}{M} \right)^2 = \frac{mv_0^2}{2} \cdot \frac{m}{M},$$

и мы видим, что она ничтожно мала по сравнению с энергией $mv_0^2/2$, которую имел камень. Поэтому ее можно пренебречь.

Пусть теперь начальная скорость Земли равна u , а начальная скорость камня равна $u + v_0$. Найдем скорость Земли в момент подъема камня на максимальную высоту. По закону сохранения количества движения будем иметь

$$m(u + v_0) + Mu = (M + m)(u + \Delta u),$$

где $u + \Delta u$ — искомая скорость, а Δu — увеличение скорости Земли за время подъема камня. Отсюда

$$\Delta u = v_0 \frac{m}{M + m},$$

или, так как m мало по сравнению с M ,

$$\Delta u = v_0 \frac{m}{M}. \quad (1)$$

Таково увеличение скорости Земли. Значит, увеличение ее кинетической энергии равно

$$\Delta T = \frac{M(u + \Delta u)^2}{2} - \frac{Mu^2}{2} = \frac{M \Delta u (2u + \Delta u)}{2},$$

где Δu определяется равенством (1). Учтя, что Δu мало по сравнению с $2u$, получим

$$\Delta T = \frac{M \Delta u \cdot 2u}{2} = Mu \Delta u$$

и с учетом (1)

$$\Delta T = mv_0 u. \quad (2)$$

Сравнивая найденное значение с энергией $mv_0^2/2$, видим, что ΔT не мало и им пренебрегать нельзя (см. Примечание 5 на стр. 78).

Таким образом, если начальная скорость Земли равна нулю, то камень почти не влияет на ее кинетическую энергию, а если начальная скорость Земли отлична от нуля, то это влияние заметно.

Теперь можно ввести поправку в уравнение (2) на стр. 28. Так как кинетическая энергия камня расходуется не только на приобретение потенциальной энергии mgh , но и на увеличение кинетической энергии Земли, равное $mv_0 u$, то равенство, выражающее закон сохранения энергии, должно иметь вид

$$\frac{m(u + v_0)^2}{2} - \frac{mu^2}{2} = mgh + mv_0 u.$$

Разрешив его относительно h , получим

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

85. Увеличение кинетической энергии Земли в 12 раз больше выделившегося тепла. Действительно, тепло, выделяющееся при ударе, равно

$$Q = \frac{mv^2}{2},$$

а кинетическая энергия, потерянная метеоритом, равна

$$T_0 - T = \frac{m(u + v)^2}{2} - \frac{mu^2}{2}$$

(так как перед ударом метеорит имел скорость $u + v$, а после удара — скорость u). Значит, увеличение кинетиче-

ской энергии Земли равно

$$\Delta T' = T_0 - T - Q = \frac{m(u+v)^2}{2} - \frac{mu^2}{2} - \frac{mv^2}{2} = muv.$$

Сравнивая $\Delta T'$ с Q , получаем

$$\frac{\Delta T'}{Q} = muv : \frac{mv^2}{2} = \frac{2u}{v} = \frac{2 \cdot 30}{5} = 12.$$

(Так как метеорит увеличивает скорость Земли на ничтожную величину, то Землю можно считать инерциальной системой. Поэтому тепло, выделившееся при ударе метеорита, равно $mv^2/2$.)

МЕХАНИКА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗОВ

86. Не будет. Действительно, вообразим, что на участке, соединяющем трубки, установлен кран, не допускающий переливания. Тогда

$$p_1 = p_0 - \rho g h_1,$$

где p_1 — давление с левой стороны крана, p_0 — давление атмосферного воздуха, ρ — плотность воды и h_1 — высота крана под уровнем AA . Аналогично

$$p_2 = p_0 - \rho g h_2,$$

где p_2 — давление с правой стороны крана, а h_2 — высота крана над уровнем BB . Но так как уровни AA и BB одинаковы, то $h_1 = h_2$ и, следовательно, $p_1 = p_2$, т. е. давление воды слева и справа от крана одинаково. Значит, если открыть кран, вода переливаться не будет.

87. Вода будет переливаться из правой трубки в левую.

88. Рассмотрим систему, состоящую из стакана и наполняющей его воды. На нее действуют силы тяжести P и P' , а также давление атмосферного воздуха и давление воды, находящейся в сосуде. Но вода, находящаяся в сосуде, давит на воду, находящуюся в стакане, с такой же силой, с какой давил бы атмосферный воздух (так как кромка стакана находится на одном уровне со свободной поверхностью воды в сосуде). Поэтому можно вообразить, что стакан с находящейся в нем водой окружен атмосферным воздухом не только сверху и с боков, но

также и снизу. Но тогда станет ясно, что сила натяжения нити равна $P + P'$.

89. Вода будет переливаться из левого сосуда в правый.

Рассмотрим давление у дна правого сосуда. До нагревания оно было равно

$$p = \rho gh,$$

а после нагревания стало равным

$$p' = \rho' gh',$$

где ρ и h — плотность и высота холодной воды, а ρ' и h' — горячей. Значит,

$$\frac{p'}{p} = \frac{\rho'}{\rho} \cdot \frac{h'}{h}.$$

Но так как масса воды не меняется, то

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{V}{V'},$$

где V — объем воды до нагревания, а V' — после. Поэтому

$$\frac{p'}{p} = \frac{V}{V'} \cdot \frac{h'}{h}.$$

Далее,

$$V = \frac{1}{3} h(s + S + \sqrt{sS}), \quad V' = \frac{1}{3} h'(s + S' + \sqrt{sS'}),$$

где s — площадь дна, а S и S' — площади свободной поверхности воды до нагревания и после нагревания. Из трех последних равенств получаем

$$\frac{p'}{p} = \frac{s + S + \sqrt{sS}}{s + S' + \sqrt{sS'}}.$$

Но так как $S < S'$, то $p' < p$, т. е. нагревание воды приводит к уменьшению давления. Отсюда следует, что вода будет переливаться из левого сосуда в правый.

90. Нет. Эта сила равна весу вытесненного объема воды плюс $p_0 S$, где p_0 — атмосферное давление, а S — площадь грани куба. (Но сила, действующая на куб со стороны воды и атмосферы, равна весу вытесненного объема воды.)

91. Силы, действующие на это тело со стороны ртути, показаны на рис. 76. Их равнодействующая R не вертикальна и не равна весу вытесненного объема ртути. Действительно, удалим мысленно это тело и поместим на его место ртуть. Поскольку силы гидростатического давления от этого не изменяются, то равнодействующую R можно рассматривать как силу, которая действует на ртуть, помещенную на место данного тела. Но так как эта ртуть находится в равновесии, то ее вес равен вертикальной составляющей силы R . А так как сила R больше своей вертикальной составляющей, то она больше веса рассматриваемого объема ртути.

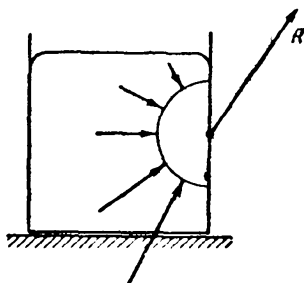


Рис 76

92. Вода оказывает на ртуть некоторое давление, и оно передается на грань AF . Следовательно, сила, действующая на нижнюю часть бруска, больше веса ртути в объеме $ABEF$. Кроме того, сила, с которой вода действует на верхнюю часть бруска, будет не выталкивающей, а погружающей.

Однако можно показать, что указанные ошибки компенсируют друг друга, и в итоге получается правильный результат. Действительно, к граням AF и CD приложены давления

$$p_{AF} = (h + BC) \cdot \rho_1 g + AB \cdot \rho_2 g,$$

$$p_{CD} = h \rho_1 g,$$

где h — толщина слоя воды над гранью CD , ρ_1 — плотность воды и ρ_2 — плотность ртути. Следовательно, выталкивающая сила равна

$$F = (p_{AF} - p_{CD}) S = (BC \cdot S) \rho_1 g + (AB \cdot S) \rho_2 g,$$

где S — площадь горизонтального сечения бруска. Из полученного выражения видно, что сила F равна весу воды в объеме $BCDE$ плюс вес ртути в объеме $ABEF$.

Наконец, можно рассуждать еще проще. Удалим мысленно этот брусок и заполним объем $ABEF$ ртутью, а объем $BCDE$ — водой. Так как силы давления на объем $ACDF$ от этого не изменятся, то не изменится и действующая на этот объем выталкивающая сила. Но

последняя, очевидно, равна весу жидкостей, заполняющих этот объем. Действительно, так как теперь в сосуде находятся ртуть и вода, причем поверхность их раздела горизонтальна, то они, несомненно, будут в равновесии. Значит, будут в равновесии и жидкости, заполняющие объем $ACDF$, из чего заключаем, что действующая на них выталкивающая сила равна их весу.

93. Левая. На алюминий будет действовать выталкивающая сила $(m_1/\rho_1)\rho_0 g$, где m_1 — масса алюминия, ρ_1 — его плотность и ρ_0 — плотность воды. Следовательно, алюминий будет давить на дно с силой

$$F_1 = m_1 g - \frac{m_1}{\rho_1} \rho_0 g = \\ = m_1 g \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) = 0,5 \cdot 9,8 \left(1 - \frac{1}{2,7}\right) = 3,09 \text{ Н.}$$

Аналогично сила, с которой давит на дно свинец,

$$F_2 = m_2 g \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2}\right) = 0,4 \cdot 9,8 \left(1 - \frac{1}{11,4}\right) = 3,58 \text{ Н.}$$

Так как $F_2 > F_1$, то перевесит та половина, где находится свинец, т. е. левая.

94. На каплю в опыте Плато действуют две системы сил: силы тяжести, приложенные к каждой частице капли, и силы давления окружающей жидкости, приложенные к поверхности капли. Так как силы первой системы приложены к одним точкам капли, а силы второй системы — к другим, то первая система сил не уничтожается второй, а лишь уравнивается ею. Но из того факта, что эти силы уравниваются друг друга, можно сделать лишь один вывод: капля будет оставаться в покое. Сделать же из этого какое-нибудь заключение о ее форме, очевидно, нельзя.

В недостаточности изложенного объяснения опыта Плато можно убедиться на следующем примере. Рассмотрим каплю ртути, лежащую на горизонтальной плоскости. На нее тоже действуют две уравновешенные силы: сила тяжести и реакция плоскости. Однако эти силы не уничтожают друг друга, и поэтому капля не принимает форму шара.

Одно из возможных объяснений опыта Плато таково: поскольку капля имеет такую же плотность, как окружающая жидкость, последняя не препятствует капле принять любую форму; поэтому она приобретает ту фор-

му, которую ей сообщают силы поверхностного натяжения, т. е. шаровую.

95. Нет. Для состояния невесомости характерно отсутствие внутренних напряжений, порождаемых силами тяжести. Такое состояние достигается только при свободном падении в поле силы тяжести или в каком-нибудь другом однородном гравитационном поле (а также при отсутствии каких-либо сил и полей). На аквалангиста же действуют не только силы тяжести, но и силы гидростатического давления воды, которая служит для него своеобразной опорой. Поэтому в его теле сохраняются внутренние напряжения, хотя они и принимают несколько иной характер (так как порождаются не только силами тяжести, но и силами гидростатического давления).

96. Пусть, пройдя путь s , шар переместился из положения 1 в положение 2 (рис. 77). Так как это перемещение можно осуществить, меняя местами шар 1 и жидкость, занимающую объем 2, то потенциальная энергия системы шар — жидкость при этом уменьшится на величину

$$Mgs - mgs,$$

где m — масса шара, а M — масса вытесняемой им жидкости. Поэтому

$$Mgs - mgs = \frac{mv^2}{2} + T,$$

где $mv^2/2$ — кинетическая энергия, приобретенная шаром, а T — жидкостью. Но так как

$$v^2 = 2as,$$

где a — ускорение шара, то

$$Mgs - mgs = mas + T,$$

откуда

$$a = \frac{Mg - mg}{m} - \frac{T}{ms}.$$

Далее, так как Mg есть вес жидкости, вытесняемой шаром, то $Mg = F$, где F — выталкивающая сила, о которой говорится в условии. Поэтому

$$a = \frac{F - mg}{m} - \frac{T}{ms}.$$

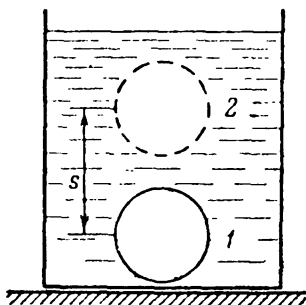


Рис. 77.

Полученное равенство показывает, что

$$a < \frac{F - mg}{m}. \quad (1)$$

Заметим, что так как

$$a = \frac{F' - mg}{m}, \quad (2)$$

где F' — сила, с которой жидкость действует на всплывающий шар, то из соотношений (1), (2) следует, что $F' < F$.

Таким образом, когда шар всплывает, выталкивающая сила становится меньше силы F , определяемой законом Архимеда.

97. Выберем на поверхности шара две точки, симметричные относительно его центра, например, точки A и A' на рис. 50. Так как поток, обтекающий этот шар, симметричен относительно плоскости PP и линии LL , то скорость жидкости в этих точках одинакова. Отсюда следует, что в этих точках одинаково и давление. Значит, силы, приложенные к шару в точках A и A' , взаимно уравновешиваются, из чего заключаем, что уравновешиваются вообще все силы, действующие на шар со стороны жидкости.

98. Пленка не будет иметь форму цилиндра с образующими, параллельными AA' и CC' . Она несколько прогнется внутрь, и силы, действующие на рамку на участках ABC и $A'B'C'$, будут иметь составляющие, направленные вниз.

99. Нет. Энергия сжатого воздуха есть кинетическая энергия его молекул (если пренебречь силами молекулярного взаимодействия, которые в обычных условиях очень малы). Когда воздух сжимают, затрачиваемая работа идет на увеличение кинетической энергии его молекул, т. е. на увеличение его температуры, а когда сжатый воздух расширяется и совершает работу, она производится за счет уменьшения кинетической энергии его молекул, т. е. за счет его охлаждения. Если же воздух будет расширяться при постоянной температуре, то он должен будет черпать тепло извне (чтобы поддерживать температуру неизменной). В этом случае он будет совершать работу за счет внутренней энергии окружающей среды.

100. Когда самолет берет дополнительный груз, летчик увеличивает угол атаки крыльев и тем самым увеличивает подъемную силу. Однако при этом увеличивается и лобовое сопротивление, вследствие чего скорость самолета становится меньшей.

1. К решению задачи 8 Равенство $v = ks$ можно записать в виде дифференциального уравнения

$$\frac{ds}{dt} = ks.$$

Решив его, получим

$$s = Ce^{kt},$$

где C — некоторая константа. С другой стороны, если $t = 0$, то должно быть и $s = 0$. Подставив эти значения в полученное равенство, придем к выводу, что $C = 0$. Следовательно, зависимость s от t имеет вид

$$s = 0,$$

т. е. рассматриваемая точка вообще не движется. Таким образом, равенство $v = ks$ возможно только в том случае, когда $v = s = 0$.

2. К решению задачи 42. Докажем, что если

$$\omega > \sqrt{\frac{g}{l}},$$

то положение $\alpha = 0$ является неустойчивым. Будем рассматривать стержень и шар в системе отсчета, жестко связанной с вращающимся валом. Пусть вследствие случайных причин стержень отклонится от вертикали на небольшой угол α . Тогда на шар будет действовать не только сила тяжести mg , но и центробежная сила инерции $F_i = m\omega^2 l \sin \alpha$. Так как первая из этих сил стремится повернуть стержень по часовой стрелке, а вторая — против, то, вычислив моменты этих сил относительно точки A (см. рис. 26), найдем, что момент силы тяжести равен

$$M_1 = mg \cdot l \sin \alpha,$$

а момент центробежной силы равен

$$M_2 = F_i l \cos \alpha = m\omega^2 l \sin \alpha \cdot l \cos \alpha.$$

Стержень вернется в вертикальное положение, если $M_1 > M_2$, т. е. если выполняется неравенство

$$mgl \sin \alpha > m\omega^2 l \sin \alpha \cdot l \cos \alpha.$$

Положив здесь $\cos \alpha = 1$ (так как угол α мал), получим

$$\omega < \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Значит, только в этом случае вертикальное положение стержня устойчиво.

3. К решению задачи 76. Хотя сделанное утверждение достаточно очевидно, его можно подкрепить расчетом. Пусть I — момент инерции космического корабля с космонавтом, а ω — угловая скорость этого корабля. Согласно закону сохранения момента количества движения

$$I\omega = \text{const.}$$

Когда космонавт поднимается по лестнице, он приближается к оси вращения корабля и тем самым уменьшает момент инерции I . Следовательно, при этом увеличивается ω . Далее, так как кинетическая энергия корабля равна

$$\frac{I\omega^2}{2} = I\omega \frac{\omega}{2} = \text{const} \frac{\omega}{2},$$

то она при этом тоже увеличивается.

4. К решению задачи 77. Полученный ответ верен не только для одноатомного газа. Так как массы смешиваемых газов одинаковы, то, очевидно,

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2},$$

где T_1 и T_2 — абсолютные температуры этих газов до смешения, а T — после смешения. Но температура любого газа пропорциональна квадрату средней скорости его молекул. Поэтому из последнего равенства вытекает, что

$$v^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2}{2}.$$

5. К решению задачи 84. Можно было бы рассуждать немного проще. Удаляющийся от Земли камень притягивает ее с силой mg и поэтому увеличивает ее кинетическую энергию на величину работы этой силы. Таким образом,

$$\Delta T = mgs,$$

где s — путь, пройденный Землей за время подъема камня. Если начальная скорость Земли равна нулю, то s ничтожно мало и поэтому ΔT тоже ничтожно мало. Если же начальная скорость Земли равна u , то s велико и поэтому велико ΔT . В этом случае получим

$$s = ut, \quad t = \frac{v_0}{g}, \quad s = \frac{uv_0}{g},$$

$$\Delta T = mgs = mv_0 u.$$

Далее можно повторить рассуждения, наложенные на стр. 70 после равенства (2).

СОДЕРЖАНИЕ

ЗАДАЧИ

Кинематика	3
Статика	8
Динамика	12
Механика жидкостей и газов	29

РЕШЕНИЯ

Кинематика	33
Статика	41
Динамика	46
Механика жидкостей и газов	71

Примечания	77
----------------------	----

Борис Юрьевич Коган

Сто задач по механике

(Серия «Библиотечка физико-математической школы»)

М., 1973 г., 80 стр. с илл.

Редактор *Л. И. Гладнева*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

Сдано в набор 14/V 1973 г. Подписано к печати 2/К 1973 г. Бумага 84×108¹/₁₆. Физ. печ. л. 2,5. Условн. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 3,45. Тираж 250 000 экз. Т-16901. Цена книги 10 коп. Заказ № 636

Издательство «Наука»

Главная редакция
физико-математической литературы

117071, Москва, Б-71, Ленинский проспект, 15

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
198052, Ленинград, Измайловский проспект, 29

Цена 10 коп.

